В.А. Арет, Л.А. Байченко, Л.А. Забодалова, А.Л. Ишевский

Расчетно-графические работы по инженерной реологии

Электронное методическое пособие
для проведения практических занятий

ИЦ "Интермедия"
Санкт-Петербург
2012

УДК 664.6/.7.
ББК 22.251.3
А 80

Арет В.А., Байченко Л.А., Забодалова Л.А., Ишевский А.Л.
Расчетно-графические работы по инженерной реологии

электронное учебное пособие

А 80 Арет В.А.
Расчетно-графические работы по инженерной реологии: электронное учебное пособие. / В.А. Арет, Л.А. Байченко, Л.А. Забодалова, А.Л. Ишевский. СПб.: ИЦ Интермедия, 2012. — 82 с.

ISBN 978-5-4383-0023-6

Целью пособия является углубление представлений студентов о реологии, в частности, о понятии вязкости, вязко-упругости, о течении ньютоновских и неньютоновских жидкостей в трубах и рабочих каналах пищевых машин и аппаратов. Хотя в пособии приведены лишь расчетные работы, но при желании они могут быть легко подкреплены соответствующими лабораторными работами на различных реометрах. Данное пособие также позволяет студентам и преподавателям ознакомиться с некоторыми элементами современных информационных технологий и дистанционного образования.

ISBN 978-5-4383-0023-6

© ООО «Издательский центр “Интермедия”», 2012
© Арет В.А., , Байченко Л.А., Забодалова Л.А., Ишевский А.Л., 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Тема работы № 1. Определения коэффициента динамической вязкости ньютоновской жидкости и характеристик ее течения в трубе 6

Тема работы № 2. Исследование статистических понятий: среднеквадратичное уклонение и коэффициент корреляции 12

Тема работы № 3. Определения индекса течения и коэффициента консистенции жидкости Оствальда – Де Виля и характеристик ее течения в трубе 22

Тема работы № 4. Определения по результатам капиллярной вискозиметрии предельного напряжения сдвига и коэффициента пластической вязкости среды Шведова-Бингама и характеристики ее течения в трубе 36

Тема работы № 5. Определения по результатам капиллярной вискозиметрии реологических констант среды Гершеля–Балклали и ее течение в трубе 44

Тема работы № 6. Определения по результатам ротационной вискозиметрии коэффициента динамической вязкости ньютоновской жидкости 50

Тема работы № 7. Явление релаксации напряжений в вязко-упругой среде Максвелла 61

Тема работы № 8. Явление ползучести в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта 66

Тема работы № 9. Метареологические испытания пищевых продуктов 72

Глоссарий 80

Литература 81

Введение

Реология является сравнительно новым наряду с такими традиционными учебными дисциплинами как гидравлика, теплотехника, высшая математика, теоретическая механика и многими другими, которые располагают большим количеством разноплановых учебников и учебных пособий, что нельзя сказать про инженерную реологию. Данное пособие призвано в какой-то степени восполнит этот учебно-методический пробел.

Целью пособия является углубление представлений студентов о реологии, в частности, о понятии вязкости, вязко - упругости, о течении ньютоновских и неньютоновских жидкостей в трубах и рабочих каналах пищевых машин и аппаратов.

Хотя в пособии приведены лишь расчетные работы, но при желании они могут быть легко подкреплены соответствующими лабораторными работами на различных реометрах.

Пособием можно пользоваться в бумажной версии, а в электронной версии, если кликнуть на подчеркнутые синие слова, то пособие Вас соединит с соответствующими электронными адресами в Интернете, где можете почерпнуть большое количество дополнительной учебной информации и проверить себя в тестовой системе по названным учебным дисциплинам.

Тема работы № 1. Определения коэффициента динамической вязкости ньютоновской жидкости и характеристик ее течения в трубе

Цель: ознакомиться со способом определения коэффициента динамической вязкости по результатам вискозиметрирования.

Задачи: Построение графика результата вискозиметрирования; составить таблицу результатов вискозиметров; рассчитать коэффициент по методу средних; рассчитать коэффициент динамической вязкости с использованием математической программы CurveExport.

Ход работы: Понятие вязкости является одним из важнейших в реологии и поэтому требует отдельного рассмотрения. Вязкость является свойством пищевого материала противодействовать сдвиговому течению. Под течением подразумевается состояние движения среды, при котором изменение скоростей сдвига вызывает изменение противодействующих течению сил внутреннего трения (касательных напряжений). С энергетической точки зрения коэффициент вязкости есть мера диссипации механической энергии или мера рассеяния в тепломеханической энергии движущейся жидкости.

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \qquad (1)$$

где τ– касательные напряжения, Па;

μ – динамический коэффициент вязкости, Па.с;

$\dot{\gamma}$ – скорость сдвига, $с^{-1}$.

Линейный закон вязкого течения Ньютона можно записать в виде:

$$dF = \mu \frac{d\upsilon}{dx} dS \qquad (2)$$

где dF – сила внутреннего трения на элементарной площадке;

dS – площадь элементарной площадки;

$\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости движения слоев в направлении, перпендикулярном к поверхности слоев (скорость сдвига);

μ – коэффициент динамической вязкости.

Формулу (2) можно переписать в следующем виде:

$$dF = \frac{\eta}{\rho} \frac{d(\rho v)}{dx} dS = \qquad (3)$$

$$= \nu \frac{d(\rho v)}{dx} dS \quad ,$$

где ρ – плотность материала (масса единицы объема); ν – коэффициент кинематической вязкости. Из формулы (3) видно, что коэффициент кинематической вязкости можно трактовать также как коэффициент переноса или диффузии количества движения (ρv).

В координатной системе y = y(x) (где x – скорость сдвига, в диапазоне 0 – 200, $с^{-1}$; y – напряжение сдвига, в диапазоне

0 – 100 , Па), провести случайную прямую от точки (0,0) не точно к точке (200,100) , (см.рис.1).

В инженерной реологии следующие обозначения:

$$x=\dot{\gamma}, c^{-1}; y=\tau, Па \ .$$

Вокруг прямой случайным образом расположить 20 точек, моделируя этим результаты вискозиметрирования (пример см. рис.1.1.):

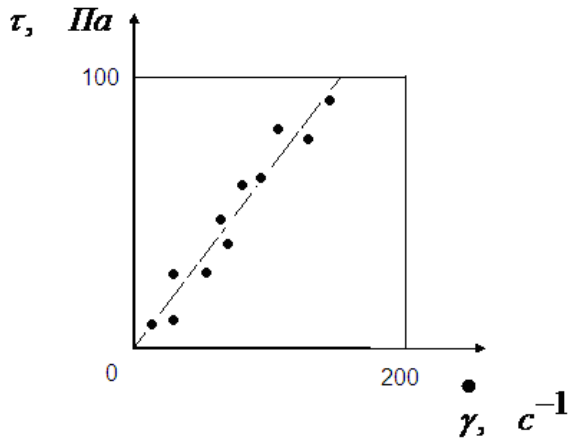


Рис. 1.1. Имитированные результаты вискозиметрирования

В результате вискозиметрирования молочной сыворотки получена таблица значений напряжений τ, Па и скоростей сдвига $\dot{\gamma}, c^{-1}$. Необходимо определить коэффициент динамической вязкости μ, $Па \cdot c$ методом средних и построить график зависимости $\dot{\gamma}=f(\tau)$.

По рисунку составляем таблицу1 данных и вычисляем коэффициент динамической вязкости по методу средних:

Таблица 1

Коэффициент динамической вязкости по методу средних

$\dot{\gamma}_i$																			
τ_i																			

Метод средних обработки данных реометрии

Вместо довольно громоздкого метода наименьших квадратов при обработке данных реометрии с успехом можно использовать гораздо более простой метод средних, дающий, как показала практика, достаточную точность. Пусть по результатам опытов составлена система из n (число опытов) уравнений для ньютоновской жидкости:

$$\tau_i = \mu \dot{\gamma}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (4)$$

Тогда по методу средних:

$$\mu = \frac{\sum_1^n \tau_i}{\sum_1^n \dot{\gamma}_i}, \qquad (5)$$

Рис. 1.2. Результаты обработки данных с помощью метода наименьших квадратов с помощью CurveExpert.

Составим таблицу полученных таким образом экспериментальных данных:

x	0	34	65	78	134	90	135	150	197	200
y	0	7	25	39	45	50	56	60	70	89

где обозначения следующие: $x=\dot{\gamma}, c^{-1}; y=\tau, Па$.

Далее надо рассчитать с помощью математической программы CurveExpert по методу наименьших квадратов величину коэффициента динамической вязкости; провести прямую линейной регрессии, определить стандартную ошибку S и коэффициент корреляции r.

Рассчитать по методу средних коэффициент динамической вязкости можно по формуле:

$$\mu = \frac{\sum_{1}^{10} \tau_i}{\sum_{1}^{10} \dot{\gamma}_i}$$

Выводы:

1. Методом средних по данным вискозиметрии можно определить коэффициент динамической вязкости.
2. Методом наименьших квадратов можно уточнить коэффициент динамической вязкости, определенный методом средних.
3. Метод наименьших квадратов позволяет оценить точность измерений по стандартной ошибке (среднеквадратичное уклонение) и коэффициенту корреляции.

Тема работы № 2. Исследование статистических понятий: среднеквадратичное уклонение и коэффициент корреляции

Цель: Изучение статистических понятий при построении корреляционных зависимостей

Задачи: Исследование влияния точности измерения напряжения и скорости сдвига при вискозиметрировании ньютоновсой жидкости на статистические параметры определения динамического коэффициента вязкости с использованием метода наименьших квадратов и программы CurveExpert.

Ход работы. В координатной системе y = y(x) (где x – скорость сдвига, в диапазоне 0–200, c^{-1}; y – напряжение сдвига, в диапазоне 0–100 , Па), провести случайную прямую от точки (0,0) не точно к точке (200,100) , (см. рис.1).

В инженерной реологии следующие обозначения:

$$x=\dot{\gamma}\,, c^{-1}\,; y=\tau\,, Па$$

Вокруг прямой случайным образом расположить 20 точек, моделируя этим результаты вискзиметрирования.

В опыте № 1 расположить точки сравнительно близко к прямой (см. рис. 2.1), в опыте № 2 – немного более разбросанными (см. рис. 2.3), а в опыте № 3 точки вообще разбросать по координатной площади случайным образом (см. рис. 2.5).

Опыт № 1

$\dot{y}_i$	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
τ_i	1	7	9	16	23	27	31	35	44	47	51	55	63	68	70	73	81	85	92	95

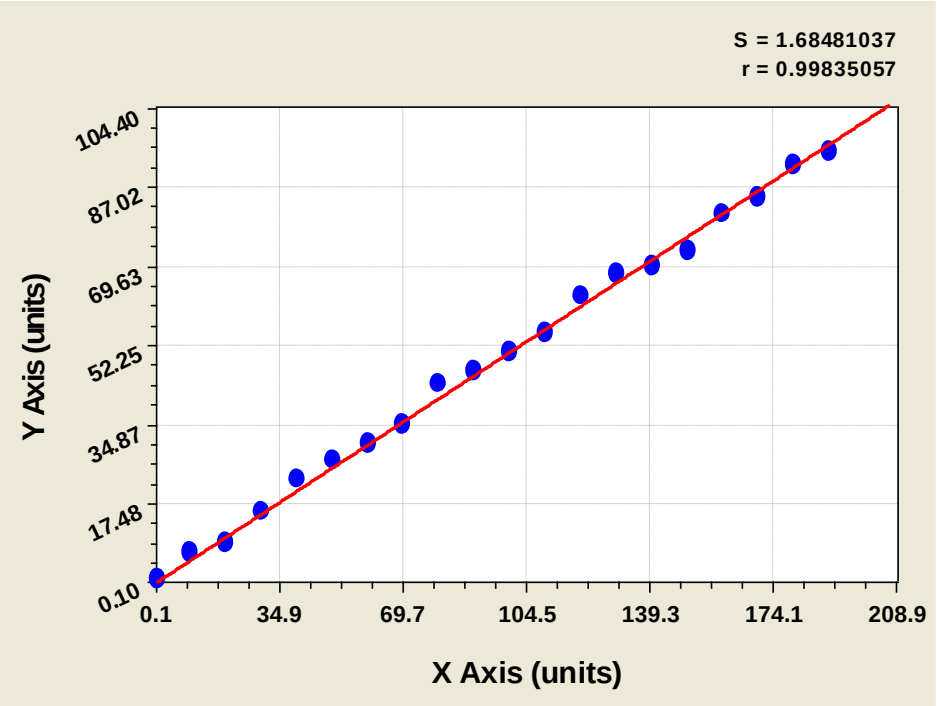


Рис. 2.1. Результаты опыта № 1
с эмпирической корреляционной прямой

User-Defined Model: y=a*x
Coefficient Data:
a = 0.50761333

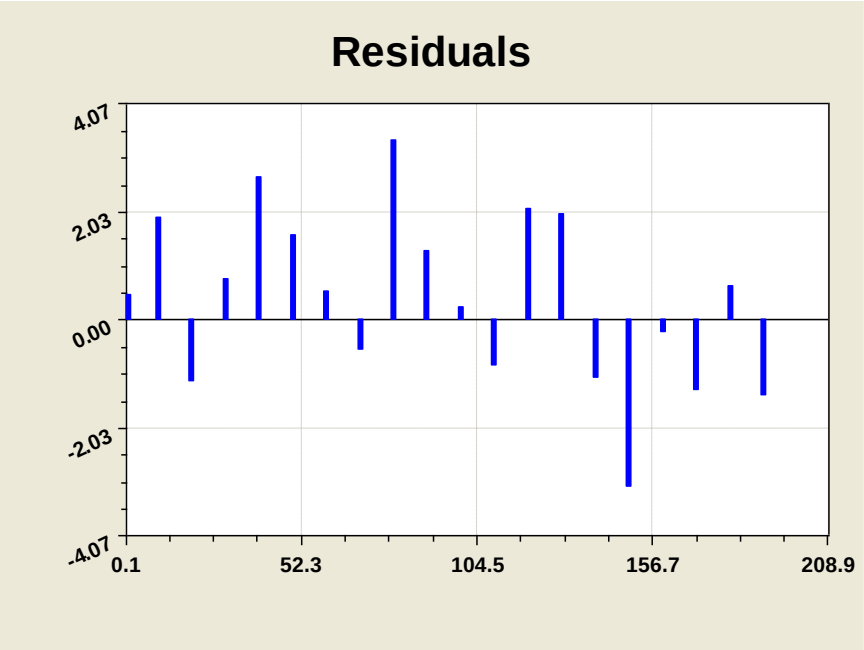


Рис. 2.2. График уклонений в опыте № 1
при использовании линейной регрессии

User-Defined Model: y=a*x
Standard Error: 1.6848104
Correlation Coefficient: 0.9983506

Опыт №2

$\dot{y}_i$	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	10	120	130	140	150	160	170	180	190
τ_i	1	10	5	20	17	30	45	50	35	50	40	50	51	70	80	50	80	90	100	80

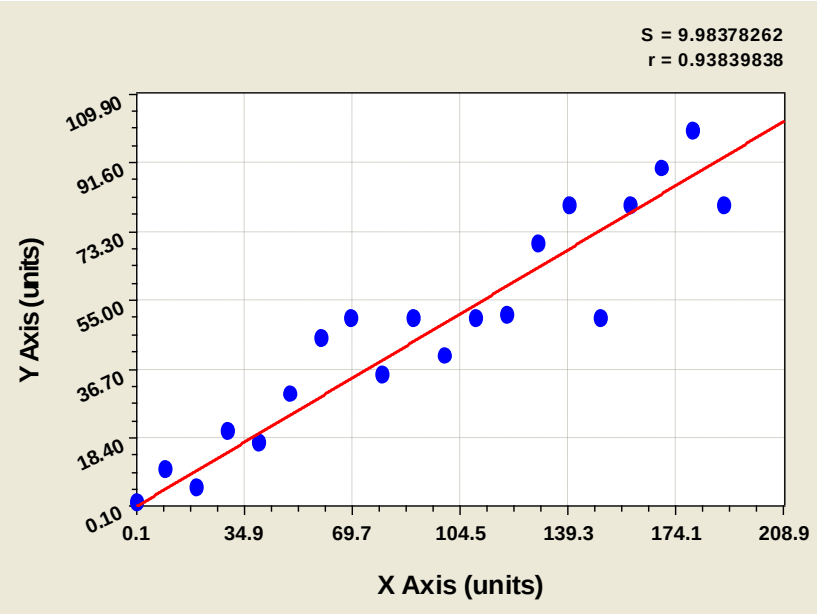


Рис. 2.3. Данные опыта № 2 с прямой регрессии

User-Defined Model: y=a*x
Coefficient Data:
a = 0.49069032

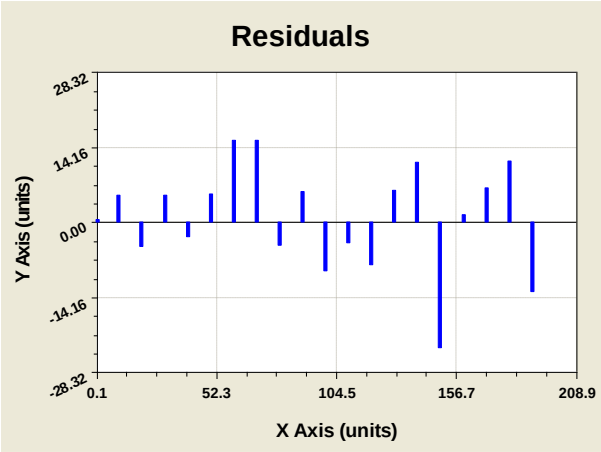


Рис. 2.4. График уклонений в опыте № 2
при использовании линейной регрессии

User-Defined Model: y=a*x
Standard Error: 9.9837826
Correlation Coefficient: 0.9383984

Опыт № 3

$\dot{y}_i$	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
τ_i	1	50	3	47	90	30	2	43	90	50	23	99	34	23	85	23	76	90	34	88

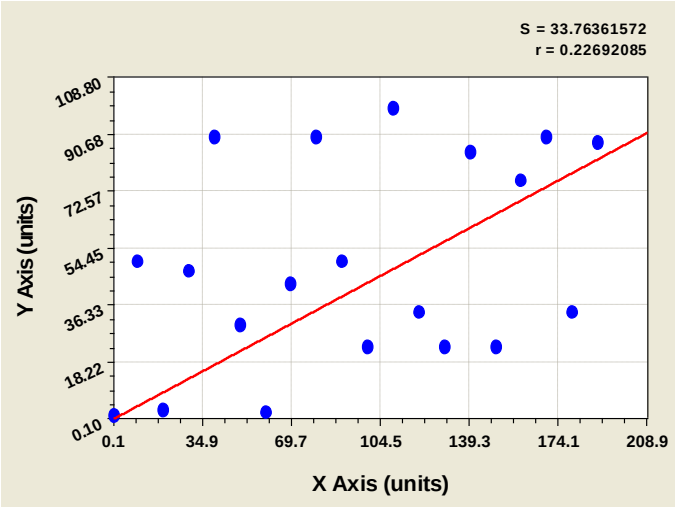


Рис. 2.5. Данные опыта № 3
с эмпирической линейной формулой

User-Defined Model: y=a*x
Coefficient Data:
a = 0.43648001

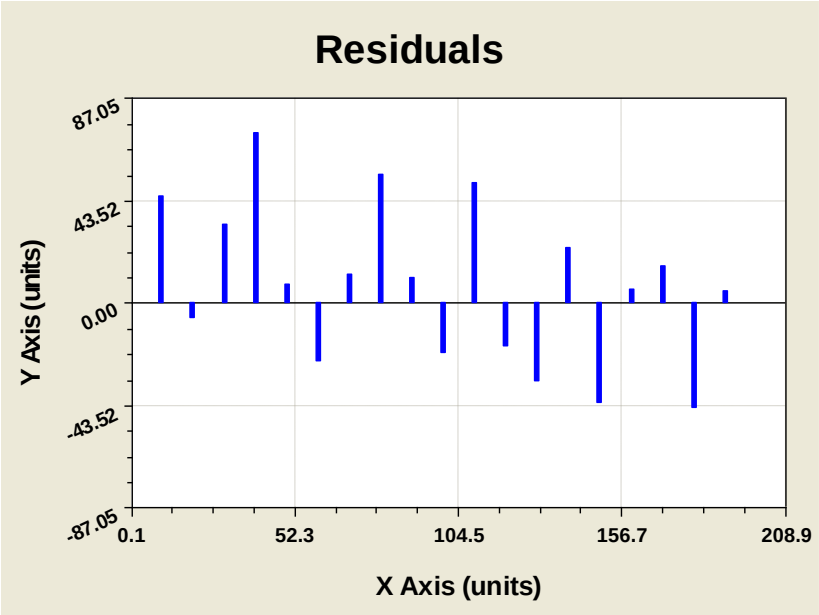


Рис. 2.6. График уклонений в опыте № 3
при использовании линейной регрессии

User-Defined Model: y=a*x
Standard Error: 33.7636157
Correlation Coefficient: 0.2269208

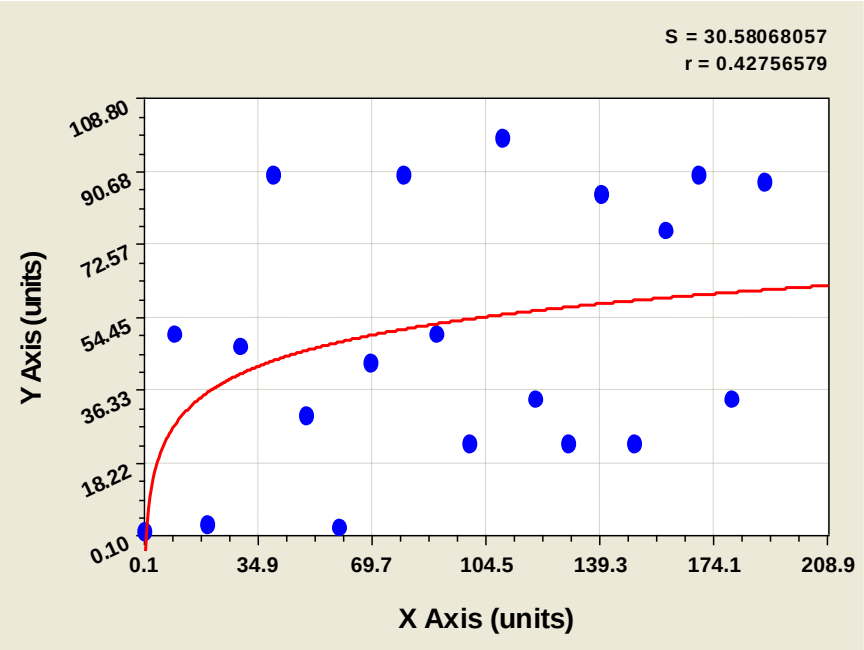


Рис. 2.7. Эмпирическая логарифмическая кривая по данным опыта № 3

Logarithm Fit: y=a+b*ln(x)
Coefficient Data:
a = 2.4299043
b = 11.221725

Standard Error: 30.5806806
Correlation Coefficient: 0.4275658

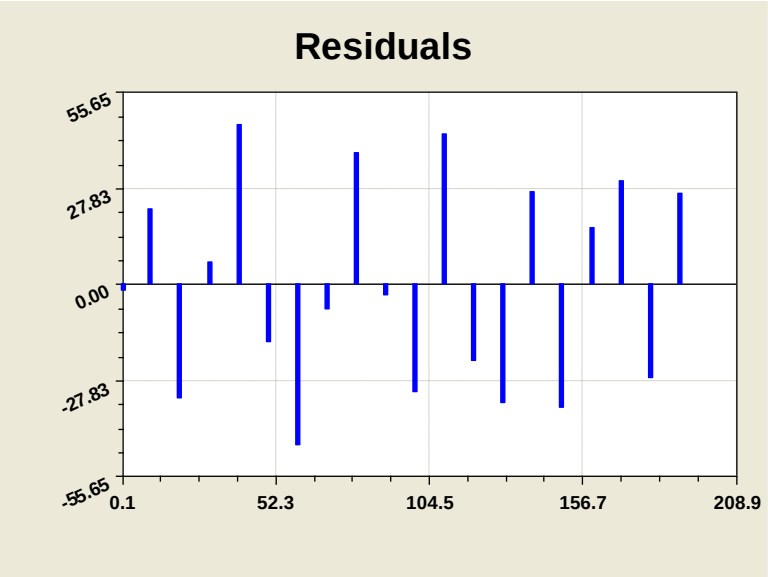


Рис. 2.8. График уклонений в опыте № 3
при использовании логарифмической регрессии вида: y=a+b*ln(x)

Сравнение статистических параметров:

<u>Опыт № 1</u>
a = 0.50761333
Standard Error: 1.6848104
Correlation Coefficient: 0.9983506
<u>Опыт № 2</u>
a = 0.49069032
Standard Error: 9.9837826
Correlation Coefficient: 0.9383984
<u>Опыт № 3</u>
a = 0.43648001
Standard Error: 33.7636157
Correlation Coefficient: 0.2269208

Использование логарифмической функции.
Logarithm Fit: y=a+b*ln(x)
Coefficient Data:
a = 2.4299043
b = 11.221725
Standard Error: 30.5806806
Correlation Coefficient: 0.4275658

Выводы:

Коэффициент динамической вязкости почти не изменился. Среднеквадратичная ошибка в опыте № 2 увеличился примерно 6 раз по сравнению с опытом № 1 , а опыте № 3 на порядок. Коэффициент корреляции в опыте № 2 по сравнению с опытом № 1 тоже увеличился примерно на 0.06, а очень маленький коэффициент корреляции в опыте № 3 говорит о том, что между данными в опыте № 3 существует очень слабая линейная корреляционная связь.

В обработке данных опыта № 3 можно немного уменьшить среднеквадратичную ошибку и увеличить коэффициент корреляции, если в качестве эмпирической формулы использовать не линейную функцию вида y=a*x , логарифмическую функцию вида y=a+b*ln(x). Практически между данными нет связи, которые можно удовлетворительно описать эмпирической аналитической функцией.

Тема работы № 3. Определения индекса течения и коэффициента консистенции жидкости Оствальда – Де Виля и характеристик ее течения в трубе

Цель: Ознакомиться со свойствами и характеристиками течения степенных жидкостей.

Задачи: Изучить:

реологическую формулу степенной жидкости;

реологическую кривую течения в координатах напряжение и скорость сдвига; уравнение Рабиновича;

объемный расход и эпюры скоростей течения ньютоновской и степенной жидкости в трубе;

линеаризация степенной зависимости

Ход работы: многие пищевые среды, являющиеся сложными дисперсными средами из многокомпонентных органических природных полимеров, не подчиняются закону вязкости Ньютона и их вязкостные свойства нельзя описать одним параметром – коэффициентом вязкости. Эти свойства исследуются с помощью вискозиметров и различных реометров. Такие жидкости называются неньютоновскими. Иногда в литературе встречается термин – аномальные. Примером таких жидкостей могут быть степенные жидкости, которые описываются законом Оствальда – Де Виля.

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \qquad (1)$$

где k – реологическая константа, коэффициент консистенции;

n – реологическая константа, индекс течения.

Этим законом описывается течение очень многих искусственных полимеров, а также смесей натуральных биологических органических полимеров – пищевых сред.

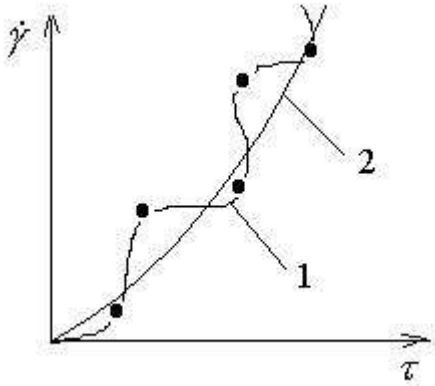


Рис. 3.1. Реологическая кривая течения в координатах напряжение и скорость сдвига. 1- кривая по точной интерполяционной формуле; 2 – действительная физически и экспериментально обоснованная кривая течения Оствальда-Де Виля степенной жидкости

Среди множества типов вискозиметров для исследования вязкостных свойств пищевых масс в первую очередь следует рекомендовать капиллярные и ротационные вискозиметры, потому что теория обработки данных измерений на этих приборах наиболее детально разработана. Причем если теория капиллярных вискозиметров проще, чем ротационных, и на капиллярных вискозиметрах сравнительно легко непосредственно моделировать и имитировать многие процессы формования и транспортирования пищевых масс, то при ротационной вискозиметрии требуется меньше испытываемой пищевой среды, проще достичь широкого диапазона скоростей сдвига и исследовать, кроме вязкостных свойств, вязкоупругие свойства пищевого продукта.

В литературе имеются также данные об инвариантности результатов капиллярной и ротационной вискозиметрии по сравнительному критерию инвариантности. Например, Кузнецов с сотрудниками исследовал свойства растворов желатина до 25 % на капиллярном вискозиметре типа Убеллоде–Гольда и на немецком ротационном вискозиметре «Реотест». Было обнаружено, что свойства высококонцентрированных растворов желатина можно описывать реологической моделью Шведова–Бингама, а сравнительная реометрия на двух указанных приборах дала совпадение результатов в пределах 5–15 %. Эти данные еще раз подтверждают совершенство теории капиллярных и ротационных вискозиметров и позволяют отнести эти вискозиметры к группе условно-абсолютных приборов, если следовать функциональной системе классификации реометров.

В опытах на капиллярных вискозиметрах обычно измеряются объемный или весовой расход протекающей среды и перепад давления при известных длине и диаметре капилляра. Задачей теории вискозиметра является определение связи между скоростями и напряжением сдвига в исследуемой среде безотносительно размеров капилляра. Рассматривая ламинарный изотермический стационарный осесимметричный поток среды в капилляре, легко по уравнению равновесия определить напряжение сдвига в любом коаксиальном слое капилляра:

$$(p_2 - p_1)\,\pi r^2 - 2\pi r L \tau = 0 \qquad (2)$$

и

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2L}; \quad \Delta p = p_2 - p_1, \qquad (3)$$

где τ – напряжение сдвига на цилиндрической поверхности участка потока; r – радиус мысленно вырезанного цилиндрического осесимметричного участка потока, равновесие которого рассматривается; L – расстояние между поперечными сечениями капилляра; p_1, p_2 – давление в начальном и конечном поперечных сечениях капилляра.

Как видно, напряжение сдвига не зависит от вязкостных свойств среды. Теперь необходимо по измеренному объемному расходу определить скорость сдвига; она разная в каждом слое текущей жидкости и зависит от реологического закона сдвигового течения среды, а закон этот априорно неизвестен, поскольку определение его является целью вискозиметрии.

$$-\dot{\gamma}_R = \frac{1}{\pi R^3}\left(\tau_R \frac{dQ}{d\tau_R} + 3Q\right). \quad (4)$$

Формула (3) позволяет вычислить скорость сдвига на стенке капилляра. В этом же месте по формуле (2) можно рассчитать напряжение сдвига. Чтобы представить уравнение (3) через измеряемые при капиллярной вискозиметрии величины, воспользуемся еще раз формулой (2) и перепишем (3) в виде уравнения Рабиновича:

$$-\dot{\gamma}_R = \frac{1}{\pi R^3}\left(\Delta p \frac{dQ}{d\Delta p} + 3Q\right). \quad (5)$$

Таким образом, уравнения (4) и (2) лежат в основе теории капиллярной вискозиметрии и позволяют по измеренному объемному расходу и перепаду давления при известной геометрии капилляра без всяких предварительных предположений о виде связи между скоростью и напряжением сдвига получить эту искомую связь. Знак минус связан с тем, что

$\Delta p < 0$.

$$Q = -\frac{\pi R^3}{\tau^3 w}\int_0^{\tau}\tau^2\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}};\ d\tau = \frac{n\pi R^3}{3n+1}\cdot\left(\frac{R\Delta p}{2Lk}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (6)$$

Это уравнение при определенных значениях индекса течения и коэффициента консистенции переходит в формулу Пуазейля.

$$Q = -\left(\frac{\Delta p}{2L\mu}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\pi n}{1+3n}\cdot R^{\frac{1+3n}{n}}$$

$$= \left(\frac{340000}{2\cdot 500\cdot 0.37}\right)^{\frac{1}{0.7}}\cdot\frac{3.14\cdot 0.7}{1+3\cdot 0.7}\cdot 0.05^{\frac{1+3\cdot 0.7}{0.7}} = 0.112\ ,\ \frac{м^3}{с}.$$

Построить эпюру скоростей степенной жидкости на эпюре скоростей течения ньютоновской жидкости по формулам (7) и (8):

степенная жидкость

$$v(r) = \frac{b}{b+1}\cdot\left(\frac{\Delta p}{2\cdot L\cdot a}\right)^{\frac{1}{b}}\cdot\left(r^{\frac{b+1}{b}} - R^{\frac{b+1}{b}}\right)^{\frac{b+1}{b}} \qquad (7)$$

ньютоновская

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\cdot L\cdot\mu}\cdot\left(r^2 - R^2\right) \qquad (8)$$

Далее:

1. В координатной системе y = y(x) (где x – скорость сдвига, в диапазоне 0–200, $с^{-1}$; y – напряжение сдвига, в

диапазоне 0–100 , Па), провести две кривые, подобные изображенным на рис. 4 и рис. 5. В инженерной реологии, как уже указывалось в работе №1, приняты следующие обозначения: $x=\dot{y}, c^{-1}; y=\tau, Па$.

2. Вокруг кривых случайным образом расположить 2 (здесь в примерах больше) точек, моделируя этим результаты реометрии среды Оствальда-Де Виля (пример см. рис. 3.2 и рис. 3.3).

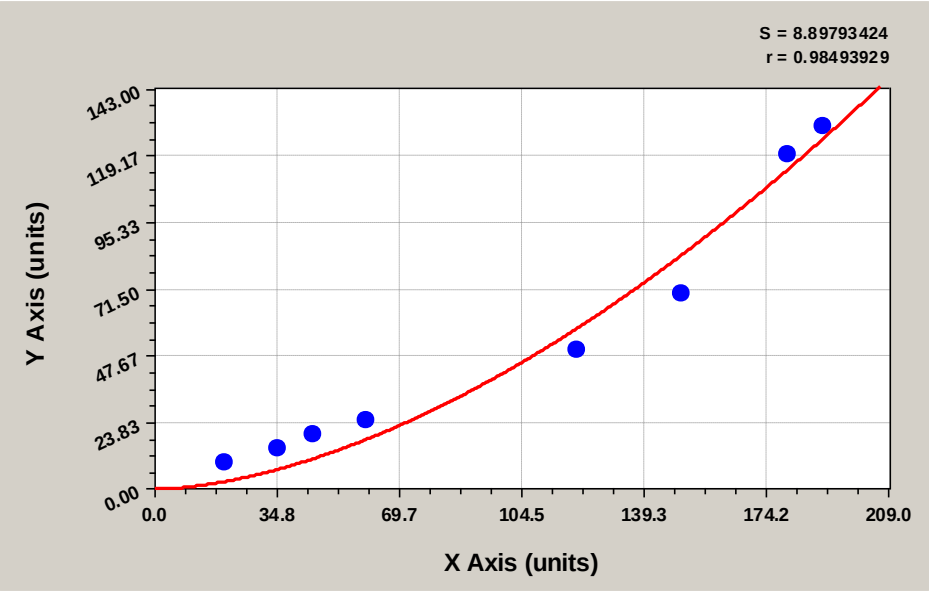


Рис. 3.2. Результаты реометрии среды Оствальда –Де Виля в случае упрочнения структуры среды при росте скорости сдвига. Кривая построена с помощью программы CurveExpert

Таблица № 1

x	y
0	
20	10
35	15
45	20
60	25
120	50
150	70
180	120
190	130

User-Defined Model: y=a*x^b

Coefficient Data:

a = 0.017006493

b = 1.696882

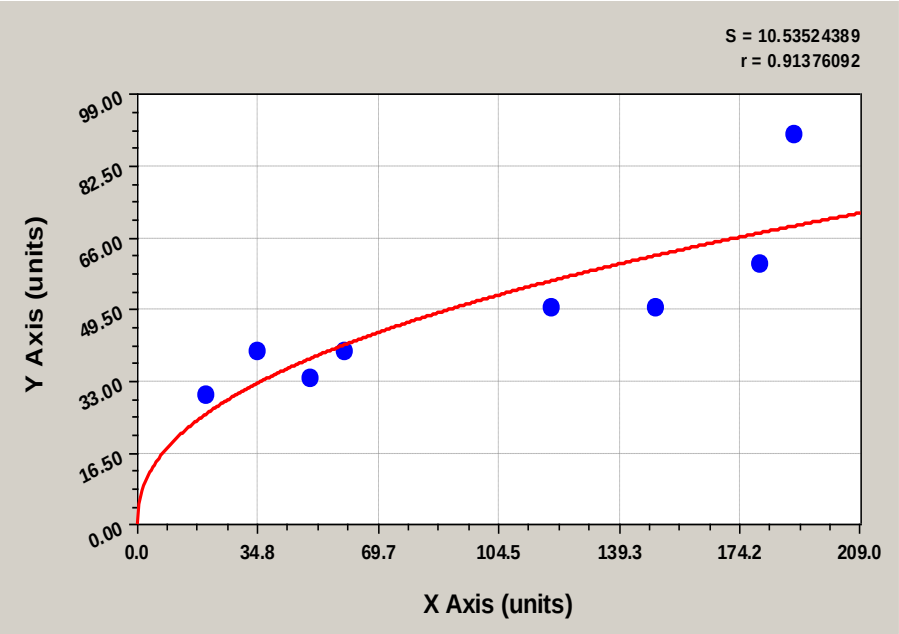


Рис. 3.3. Результаты реометрии среды Оствальда –Де Виля в случае разрушения структуры среды при росте скорости сдвига. Кривая построена с помощью программы CurveExpert **.**

Таблица № 2.

0	
20	30
35	40
50	34
60	40
120	50
150	50
180	60
190	90

User-Defined Model: y=a*x^b
Coefficient Data:
a = 6.8756474
b = 0.43899932

Составить таблицы № 1 и № 2 полученных таким образом экспериментальных данных.

Рассчитать коэффициенты консистенции и индексы течения для обоих случаев. В данных примерах:

User-Defined Model: y=a*x^b
Coefficient Data:
a = 0.017006493
b = 1.696882
User-Defined Model: y=a*x^b
Coefficient Data:
a = 6.8756474
b = 0.43899932

Рассчитаем объемный расход при течении жидкости в трубе со следующими исходными данными с помощью Mathcad.

Дано: индексы течения b и коэффициенты консистенции a.
1 случай:
a = 0.017006493
b = 1.696882
2 случай :
a = 6.8756474
b = 0.43899932

R=0.05 *м* – радиус трубы;
L=500 *м* – длина трубы;
Δp=340000 *Па* – перепад давлений

Решение:

1 случай:

a = 0.017006493

b = 1.696882

$a := 0.017006493$ $b := 1.696882$

$R := 0.05$ $L := 500$

$\Delta p := 34000$

$$\left(\frac{a\cdot\pi\cdot R^3}{3\cdot a+1}\right)\cdot\left(\frac{R\cdot\Delta p}{2\cdot L\cdot a}\right)^{\frac{1}{b}} = 3.723\times 10^{-4}$$

2 случай :

a = 6.8756474

b = 0.43899932

$a := 6.8756474$ $b := 0.43899932$

$R := 0.05$ $L := 500$

$\Delta p := 34000$

$$\left(\frac{a\cdot\pi\cdot R^3}{3\cdot a+1}\right)\cdot\left(\frac{R\cdot\Delta p}{2\cdot L\cdot a}\right)^{\frac{1}{b}} = 9.815\times 10^{-4}$$

Построим эпюры скоростей течения жидкости в трубе степенной и ньютоновской жидкостей.

Сравним эпюр скоростей степенной и ньютоновской жидкостей:

a: = 0.017006493

b: = 1.696882

R: = 0.05

L: = 500

p : = 340000

с т е п е н н а я ж и д к о с т ь:

$$f(x) := \left(\frac{b}{b+1}\right)\cdot\left(\frac{p}{2\cdot L\cdot a}\right)\cdot\left(x^{\frac{1+b}{b}} - R^{\frac{1+b}{b}}\right)$$

н ь ю т о н о в с к а я ж и д к о с т ь:

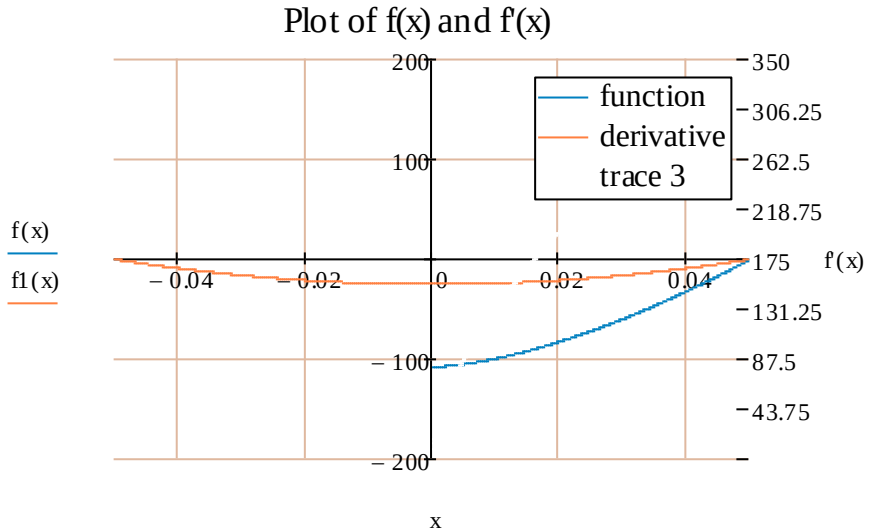
$$f1(x) := \left(\frac{p}{4\cdot L\cdot a}\right)\cdot\left(x^2 - R^2\right)$$

$$f'(x) := 0.1\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

П р о и з в о д н а я – бе с ц в е т н а я.

С т е п е н н а я ж и д к о с т ь – с и н я я.

Н ь ю т о н о в с к а я ж и д к о с т ь – к р а с н а я.



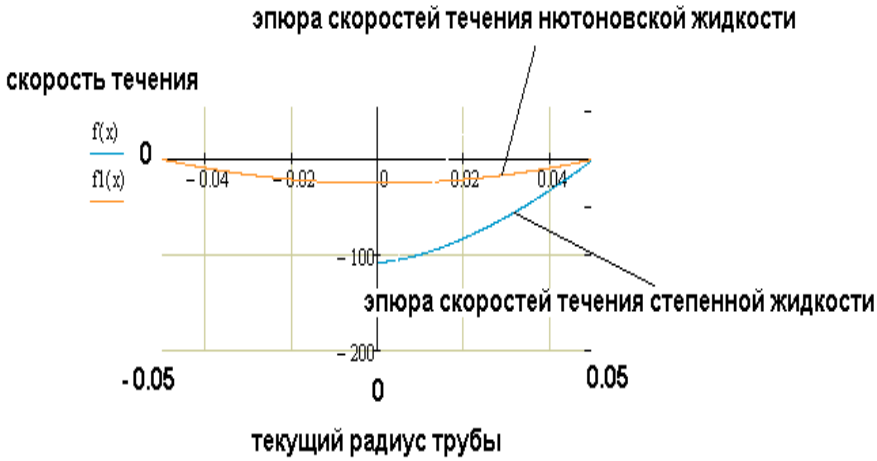


Рис. 3.4. Эпюры скоростей течения степенной и ньютоновской жидкостей в трубе

Рассчитать по методу средних и с помощью математической программы на ПК реологические константы степенной жидкости, пересчитав данные таблицы № 1 и 2 в логарифмах (линеаризация степенной зависимости).

Воспользовавшись данными из таблиц, найдём коэффициенты n и k с помощью логарифмирование.

$$lg\,\tau_i = lgK + nlg\dot{\gamma}_i$$
$$i = 1 \dots 20$$

$$\sum_{1}^{10} lg_i = 10lgK + n\sum_{1}^{10} lg\dot{\gamma}_i$$

$$\sum_{1}^{10} lg\tau_i - \sum_{11}^{20} lg\tau_i = n(\sum_{1}^{10} lg\dot{\gamma}_i - \sum_{11}^{20} lg\dot{\gamma}_i)$$

$$n = \frac{\sum_1^{10} lg\tau_i - \sum_{11}^{20} lg\tau_i}{\sum_1^{10} lg\dot{\gamma}_i - \sum_{11}^{20} lg\dot{\gamma}_i}$$

$$lg\,K = \frac{\sum_1^{10} lg\tau_i - n\sum_1^{10} lg\dot{\gamma}_i}{10}$$

Выводы:

1. Степенное реологическое уравнение можно линеализировать логарифмированием и используя метод средних для определения индекса течения и коэффициента консистенции.

2. Если индекс течения меньше единицы, то кривая течения искривляется вверх, если больше единицы – то направо (см. рисунки), если индекс течения равен единице – то это не

степенная жидкость, а ньютоновская и коэффициент консистенции является коэффициентом динамической вязкости.

Тема работы № 4. Определения по результатам капиллярной вискозиметрии предельного напряжения сдвига и коэффициента пластической вязкости среды Шведова-Бингама и характеристики ее течения в трубе

Цель: Ознакомиться со средой Шведова-Бингама

Задачи: Рассмотреть течение неньютоновских жидкостей в трубах , определить зависимости между пропускной способностью и перепадом давления при ламинарном течении в круглых трубах, научиться вычислять профиль скоростей течения среды Шведова-Бингама.

Ход работы: для напряжения трения на стенке получаем:

$$\tau_w = \frac{R\Delta P}{2L}, \qquad (1)$$

интегрирование дает:

$$u(r) = \int_r^R f(\tau_w \frac{r}{R})dr, \qquad (2)$$

поскольку u(R)=0 при допущении справедливости условия прилипания жидкости на стенке (отсутствие скольжения). Далее находим:

$$Q = \pi \int_0^R u(r)d(r^2). \qquad (3)$$

Интегрирование по частям даёт:

$$Q = \pi \int_0^R r^2 f(\tau_w \frac{r}{R}) dr, \quad (4)$$

Так как и (R)=0, бингамовский пластик.

Исходным соотношением является:

$$\gamma = \frac{\tau - \tau_y}{\mu_p} = f(\tau); \ \tau > \tau_y,$$

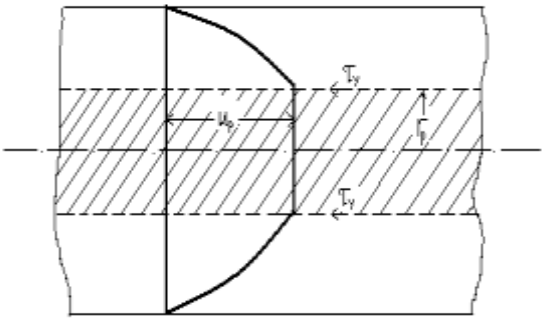
Где f(τ) – непрерывная функция такая, что

$$f(\tau) = 0, \quad 0 < \tau < \tau_y,$$

и

$$f(\tau) = \frac{\tau - \tau_y}{\mu_p}; \tau_y < \tau < \tau_w.$$

При течении в трубе напряжения трения падают до нуля на оси, а в приосевой области, где напряжения сдвига ниже предела текучести τ_y , материал не подвергается сдвигу, перемещаясь вдоль как твёрдый стержень. Это иллюстрирует профиль скоростей.



Профиль скоростей течения бингамовского пластичного тела .

Рис. 4.1.

Подстановка $f(\tau)$ в формулу (4) дает:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\mu_p \tau_w^3} \int_{\tau_y}^{\tau_w} \tau^2 (\tau - \tau_y) d\tau.$$

Выполняя интегрирование и подставив τ_w, получим формулу:

$$Q = \frac{\pi \Delta P \tau^4}{8L\,\mu_p} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2L\tau_y}{R\Delta P} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2L\tau_y}{R\Delta P} \right)^4 \right], \quad (5)$$

Известную под названием формула Букингема-Рейнера. Это уравнение нельзя разрешить относительно перепада давления. Когда предел текучести равен нулю, оно совпадает

с формулой Пуазейля. Колдуэлл и Бэбит успешно применили уравнение Букингема к задаче о течении грязей и шламов.

Для бингамовского идеально пластичного тела имеем:

$$\tau - \tau_y = -\mu_p \left(\frac{du}{dr}\right),$$

Интегрирование последнего выражения даёт:

$$u = \frac{1}{\mu_p}\left[\frac{(R^2 - r^2)\Delta P}{4L} - \tau_y (R - r_p).\right] \quad (6)$$

С учётом, что u=0 при r=R.

Вблизи оси материал будет двигаться как твёрдый цилиндрический стержень с радиусом:

$$r_p = \frac{2L\tau_y}{\Delta P.}$$

Подставив отсюда значение радиуса в (6), получим скорость квазитвёрдого движения:

$$u_p = \frac{\Delta P}{2L\mu_p}(R - r_p)^2.$$

Для известных значений $\Delta P/L$, μ_p и τ_y профиль скоростей можно вычислить из формул (5) и (6).Соответствующий расход определяется уравнением (5).

Задание: рассчитать предельное напряжение сдвига и коэффициент пластической вязкости, построить эпюру скоростей течения.

Начертить координатную плоскость Произвольно провести прямую С из начала координат. Вокруг прямой С произвольно расставить 20 точек и на основании координат этих точек составить таблицу.

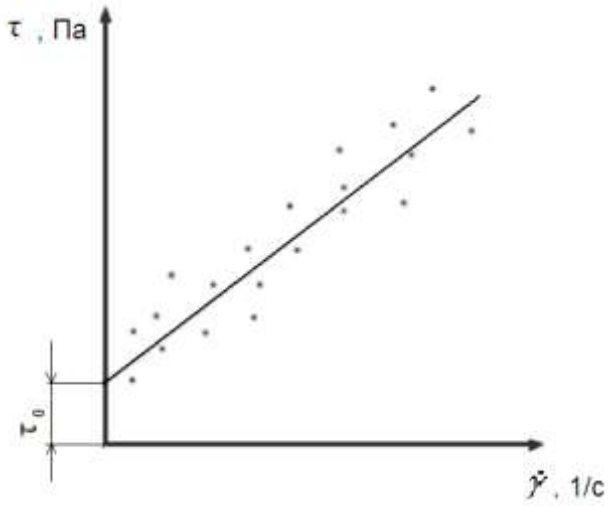


Рис. 4.2. Имитация результатов реометрии среды Шведова–Бингама

Реологическое уравнение Шведова-Бингама имеет вид:

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}_i$$

Находим коэффициент К, используя систему уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{1}^{10} \tau_i = 10\tau_0 + k\sum_{1}^{10} \dot{\gamma}_i \\ \sum_{11}^{20} \tau_i = 10\tau_0 + k\sum_{11}^{20} \dot{\gamma}_i \end{cases}$$

Отсюда вычисляем коэффициент К:

$$К = \frac{\sum_1^{10} \tau_i - \sum_{11}^{20} \tau_i}{\sum_1^{10} \dot{\gamma}_i - \sum_{11}^{20} \dot{\gamma}_i}$$

Находим τ_0 по формуле:

$$\tau_0 = \frac{\sum_1^{10} \tau_i - k \sum_{11}^{20} \tau_i}{10}$$

Рассчитаем радиус x_0 жесткого ядра потока и скорость потока V.

Из уравнения равновесия получим:

$$\tau = \frac{\Delta p x}{L}$$

Предельное напряжение сдвига τ_0 определяет толщину $2x_0$ жесткого ядра потока:

$$\tau_0 = \frac{\Delta p x}{L}$$

Реологическое уравнение Шведова-Бингама имеет вид:

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}_i$$

Преобразуем это уравнение к виду, удобному для интегрирования:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\tau}{k} - \frac{\tau_0}{k}$$

$$dv = \frac{1}{k}(\tau - \tau_0)dx$$

Произведём замену переменных $x \rightarrow \tau$ и интегрируем:

$$x = \frac{\tau L}{\Delta p}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{L}{\Delta p}$$

$$dx = \frac{L}{\Delta p} d\tau$$

$$\int_0^{v(\tau)} dv(\tau) = \int_{\tau_w}^{\tau} \left(\frac{\tau}{k} - \frac{\tau_0}{k}\right) \frac{L}{\Delta p} d\tau$$

$$v(\tau) = \frac{L}{k\Delta p} \int_{\tau_w}^{\tau} (\tau - \tau_0) d\tau = \frac{L}{k\Delta p} \left(\frac{\tau^2}{2} - \tau_0 \tau - \frac{\tau^2}{2} + \tau_0 \tau_w\right)$$

Определим скорость потока ядра:

$$v(\tau_0) = \frac{L}{k\Delta p} \left(\frac{\tau_0^2}{2} - \tau_0^2 - \frac{\tau_w^2}{2} + \tau_0 \tau_w\right)$$

Касательное напряжение на стенке канала определяет формула вида:

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2L}$$

Вычисляем радиус стержневого потока(ядра):

$$r_0 = \frac{2L \cdot \tau_0}{\Delta p}$$

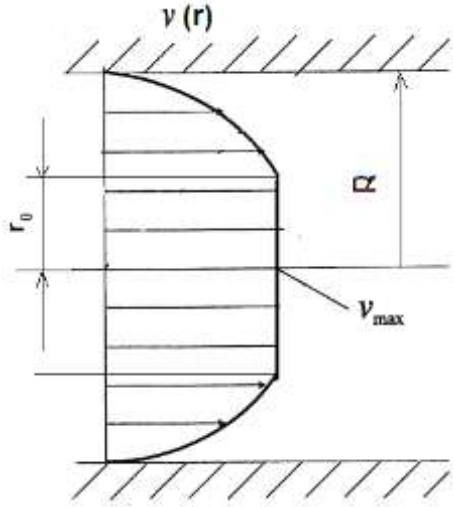


Рис. 4.3. Эпюра скоростей течения среды Шведова-Бингама

Выводы:

1. Среда Шведова–Бингама деформируется упруго и не течет, когда напряжение на стенке капилляра меньше предельного напряжения сдвига.

2. При течении среды Шведова-Бингама в трубе образуется центральное ядро, в котором скорости течения одинаковые и не зависят от текущего радиуса (см. рис. 4.3.).

3. Расход при течении среды Шведова –Бингама в трубе определяется формулой Букингема-Рейнера (см. формулу (5))

Тема работы № 5. Определения по результатам капиллярной вискозиметрии реологических констант среды Гершеля–Балклали и ее течение в трубе

Цель работы: рассмотреть течение неньютоновских жидкостей в трубах , определить зависимости между пропускной способностью и перепадом давления при ламинарном течении в круглых трубах, научиться вычислять профиль скоростей течения среды Гершеля-Балклали.

Ход работы: реологические уравнения сдвигового течения связывают между собой напряжение сдвига τ и скорость сдвига $\dot{\gamma}$ (см. рис. 5.1.).

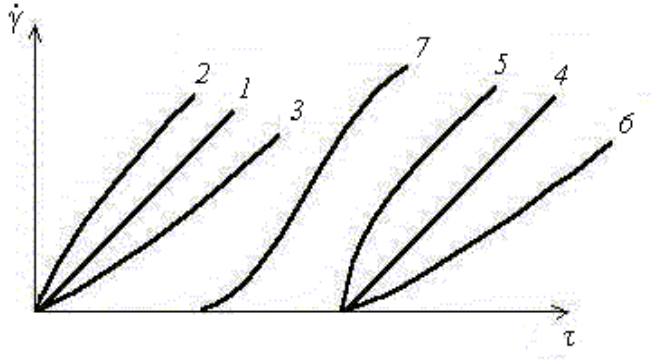


Рис. 5.1. Типовые кривые сдвигового течения пищевых сред (реограммы): *1* – ньютоновские жидкости; *2, 3* – жидкости Оствальда де Вале при различных величинах показателя степени в уравнении течения (индекса течения); *4* – среды Шведова–Бингама; 5, 6 – среды Гершеля–Балкли при различных величинах показателя степени

в уравнении течения (индекса течения); *7* – общий вид кривой течения среды

Для уравнения Гершеля-Балкли система экспериментальных данных имеет вид:

$$\tau=\tau_0+\eta\dot{\gamma}^n \quad (1)$$

Определение коэффициентов уравнения Гершеля–Балкли (1) начинаем с определения величины предельного напряжения сдвига τ_0 . Для этого располагаем пары чисел (τ_i , $\dot{\gamma}_i$) в порядке возрастания $\dot{\gamma}_i$, затем вычисляем геометрическое среднее значение $\dot{\gamma}_s$ по формуле:

$$\dot{\gamma}_s=\sqrt{\dot{\gamma}\,min+\dot{\gamma}\,max}\,, \qquad (2)$$

где $\dot{\gamma}\,min, \dot{\gamma}\,max$ – минимальное и максимальное значения скоростей сдвига.

Затем линейной интерполяцией между ближайшими к $\dot{\gamma}_s$ значениями $\dot{\gamma}_k$ и $\dot{\gamma}_{k+1}$ и, соответственно, τ_k и τ_{k+1} определяем геометрическое среднее значение напряжения сдвига по формуле:

$$\tau_S=\tau_k+\left(\frac{\tau_k-\tau_{k+1}}{\dot{\gamma}_k-\dot{\gamma}_{k+1}}\right)\left(\dot{\gamma}_S-\dot{\gamma}_k\right) \qquad (3)$$

При программировании процесс нахождения величин $\dot{\gamma}_k, \dot{\gamma}_{k+1}$ можно формализовать последовательным вычислением пар разностей $\dot{\gamma}_i-\dot{\gamma}_S$ и $\dot{\gamma}_{i+1}-\dot{\gamma}_S$, начиная от $\dot{\gamma}_1$ до нарушения условия $sign\left(\dot{\gamma}_i-\dot{\gamma}_S\right)=sign\left(\dot{\gamma}_{i+1}-\dot{\gamma}_S\right)$.

Величину предельного напряжения сдвига рассчитываем по формуле:

$$\tau_0 = \frac{\tau_{\min}\tau_{\max} - \tau_S^2}{\tau_{\min}\tau_{\max} - 2\tau_S}. \qquad (4)$$

Индекс течения и коэффициент консистенции определяем по формулам:

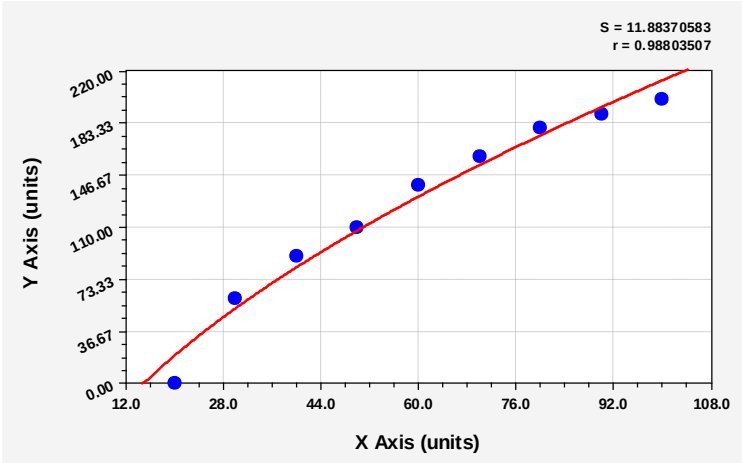
$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{m\sum_{i=1}^{p} lg\left(\tau_i - \tau_0\right) - p\sum_{i=1}^{m} lg\left(\tau_i - \tau_0\right)}{m\sum_{i=1}^{p} lg\,\dot{\gamma}_i - p\sum_{i=1}^{m} lg\,\dot{\gamma}_i} \\ lg\,k &= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} lg\left(\tau_i - \tau_0\right) - n\sum_{i=1}^{m} lg\,\dot{\gamma}_i\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Как правило, $(\tau_I - \tau_0) < 0$, но при отдельных экспериментальных числах это условие может быть нарушено, следовательно, при программировании необходимо предусмотреть защиту от этой ситуации, иначе ЭВМ вынуждена войти в расчетный конфликт, пытаясь взять логарифм из отрицательного числа.

Данные, введенные в CurveExpert

20	0
30	60
40	90
50	110
60	140
70	160
80	180

90 190
100 200

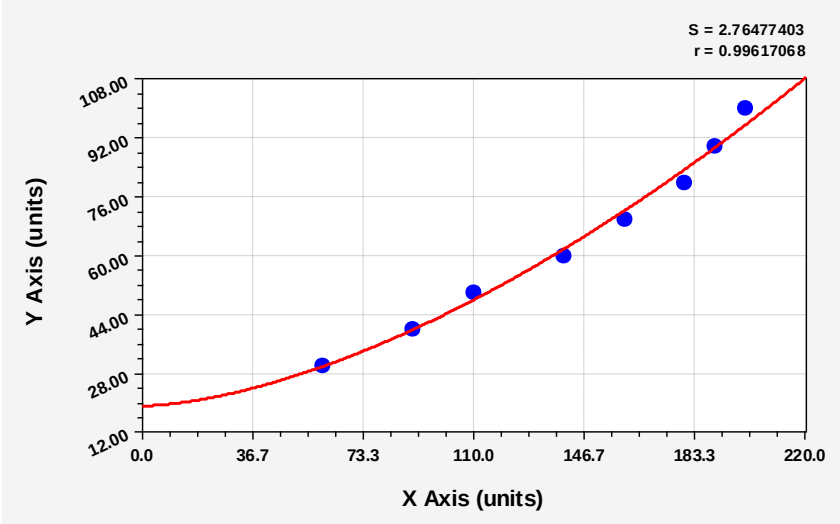


User-Defined Model: y=a+b*(x^c)
Coefficient Data:
a = -1.06120648403E+002
b = 2.21501595849E+001
c = 5.79550499817E-001
User-Defined Model: y=a+b*(x^c)
Standard Error: 11.8837058
Correlation Coefficient: 0.9880351
Comments:

The iteration count of 100 was exceeded. The fit failed to converge to tolerance of 0.000001 (CHI2 at 847.334785). No weighting used.

Данные, введенные в CurveExpert:

0	20
60	30
90	40
110	50
140	60
160	70
180	80
190	90
200	100



User-Defined Model: y=a+b*(x^c)
Coefficient Data:

a =	1.91593075704E+001
b =	1.37023817271E-002
c =	1.62816562563E+000

User-Defined Model: y=a+b*(x^c)
Standard Error: 2.7647740
Correlation Coefficient: 0.9961707

Выводы:

1. Реологическое уравнение Гершеля-Балкли является обобщением уравнений сред Ньютон, Освальда-Де Виля и Шведова-Бингама.
2. Среда Гершеля-Балкли деформируется упруго и не течет, когда напряжение на стенке капилляра меньше предельного напряжения сдвига.
3. При течении среды Гершеля-Балкли в трубе образуется центральное ядро, в котором скорости течения одинаковые и не зависят от текущего радиуса.

Тема работы № 6. Определения по результатам ротационной вискозиметрии коэффициента динамической вязкости ньютоновской жидкости

Цель: ознакомиться с работой ротационного вискозиметра.

Задачи:

1) вывести формулу для определения вязкости ньютоновской жидкости;
2) рассчитать коэффициент динамической вязкостью по формуле Маргулеса.

Ход работы: рассмотрим подробно теорию ротационных вискозиметров, поскольку в инструкциях приборов, как правило, не приводятся математические выкладки, из-за чего не всегда ясно, какие сделаны при выводе расчетных формул допущения, а в справочной литературе нередки опечатки. Кроме того, данное учебное пособие предусматривается как литература для учебных занятий, поэтому в нем нецелесообразно приводить конечные формулы с отсылкой на какую-либо справочную литературу.

Для конкретности рассмотрим схему ротационного вискозиметра типа немецкого вискозиметра «Реотест», в котором внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается (на нем измеряются крутящий момент и угловая скорость). Схема прибора показана на рис. 6.1. Течение полагаем стационарным, ламинарным, изотермическим. Компоненты скорости течения вдоль продольной оси цилиндров и в направлении радиуса полагаем равными нулю. Следовательно, реологические эффекты второго

порядка: эффекты Вейссенберга, Пойнтинга, вихри Тейлора – в рамках данной теории не описываются.

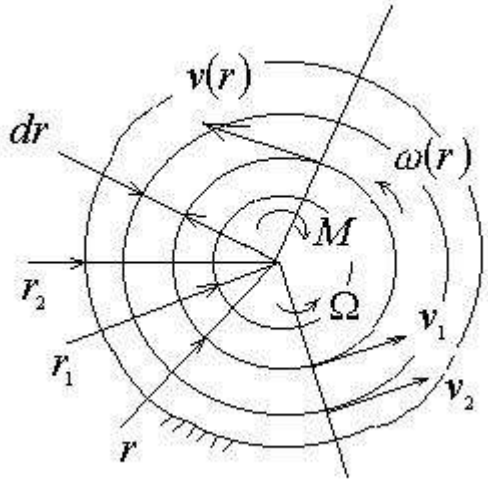


Рис. 6.1. Расчетная схема ротационного вискозиметра

Запишем уравнение равновесия в моментах относительно оси вращения мысленно выделенного цилиндрического осесимметричного элемента вискозиметра с ротором и слоем жидкости, на который действуют активный момент на роторе и реактивный момент от сил вязкого трения на внешней поверхности цилиндра жидкости:

$$2\pi r^2 L\tau - M_L = 0, \qquad (1)$$

где r – текущий радиус; L – длина цилиндров; τ – касательное напряжение на поверхности цилиндра жидкости с радиусом r; M_L – крутящий момент, активный момент.

Тогда

$$\tau(r)=\frac{M}{2\pi r^2};\ \tau_1=\tau(r_1)=\frac{M}{2\pi r_1^2};\ \tau_2=\tau(r_2)=\frac{M}{2\pi r_2^2},$$

(2)

где $M=\frac{M_L}{L}$ – крутящий момент на единицу длины цилиндров; τ_1, τ_2 – касательное напряжение на рабочих поверхностях внутреннего и наружного цилиндров; r_1– наружный радиус внутреннего цилиндра (ротора); r_2 – внутренний радиус неподвижного наружного цилиндра.

Такой же результат можно получить из уравнений движения в цилиндрических координатах. Из кинематических соображений запишем скорость сдвига в жидкости в цилиндрических координатах:

$$\dot{\gamma}(r)=\frac{\omega r+r\frac{d\omega}{dr}dr-\omega r}{dr}=$$

$$=r\frac{d\omega(r)}{dr}=r\frac{d}{dr}\left[\frac{v(r)}{r}\right],\qquad (3)$$

$$=\frac{dv(r)}{dr}-\frac{v(r)}{r}$$

где $\dot{\gamma}(r)$ – скорость сдвига на поверхности цилиндра жидкости с **текущим** радиусом; $\omega(r)$ – угловая скорость цилиндра жидкости с текущим радиусом; $v(r)$ – линейная скорость точек цилиндра жидкости с текущим радиусом.

Реологическое уравнение жидкости с учетом выражений (2) можно записать следующим образом:

$$\dot{\gamma}=f(\tau)=f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right).\qquad (4)$$

Из этой записи следует, что эффекты тиксотропии и реопексии лежат вне данной теории, хотя в принципе

ротационные вискозиметры достаточно удобные приборы для изучения этих реологических нестационарностей. С математической точки зрения важно, чтобы функция (4) была однозначной и удовлетворяла обычным условиям непрерывности и дифференцируемости, что автоматически обеспечивает физическая природа реологического уравнения.

Из уравнений (3) и (4) запишем:

$$\int_{\omega(r)}^{0} d\omega(r) = \int_{\frac{v(r)}{r}}^{0} d\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int_{r}^{r_2} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{dr}{r}.$$

(5)

Заметим, что при записи верхних пределов интегрирования полагают прилипаемость жидкости к поверхности неподвижного цилиндра вискозиметра $v(r_2) = 0$, $\omega(r_2) = 0$. Проведя интегрирование и поменяв местами пределы интегрирования, получим

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \int_{r_2}^{r} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{dr}{r}. \qquad (6)$$

Продифференцируем первое уравнение из выражений (2.102) и немного его преобразуем:

$$\frac{d[\tau(r)]}{dr} = -\frac{M}{\pi r^3}; \quad \frac{d[\tau(r)]r}{2dr} = -\frac{M}{2\pi r^2} = \tau(r) \quad (7)$$

Тогда выражение (6) в новых переменных интегрирования в правой части, опять поменяв местами пределы интегрирования, можно переписать в виде:

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_2} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \qquad (8)$$

.

Чтобы связать напряжение с измеряемой на вискозиметре угловой скоростью ротора, примем текущий радиус за радиус ротора и запишем выражение (8) в виде:

$$\Omega = \omega(r_1) = \frac{v(r_1)}{r_1} = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \qquad (9)$$

.

Выведем самое распространенное в теории ротационных вискозиметров – формулу Маргулеса. Примем за реологическое уравнение линейное уравнение ньютоновской жидкости и проведем интегрирование правой части выражения (9):

$$f(\tau) = \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\tau}{\eta}\frac{d\tau}{\tau} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\eta} \qquad (10)$$

.

Подставим в (10) величины касательных напряжений из формул (2.102) и получим формулу Маргулеса:

$$\Omega = \frac{\dfrac{M}{2\pi r_2^{\,2}} - \dfrac{M}{2\pi r_1^{\,2}}}{2\eta} = \frac{M}{4\eta\pi}\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2}\right). \qquad (11)$$

Следовательно, коэффициент динамической вязкости ньютоновской жидкости с аналитической точки зрения можно определить однократным измерением момента на роторе и угловой скорости его вращения:

$$\eta = \frac{M\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{4\Omega\pi r_1^2 r_2^2}. \qquad (12)$$

Повторные опыты нужно проводить лишь для получения статистических вероятностных показателей, на которые указывалось в начале данной главы. Поскольку момент и угловая скорость имеют разные знаки, коэффициент вязкости будет положительным. Формулу (12) можно использовать при вискозиметрировании таких текучих пищевых материалов, как, например, молоко, растительные масла и различные растворы и суспензии с малой концентрацией твердой фазы.

Если конструкция вискозиметра такова, что ротор вращается в условно-бесконечной среде жидкости, то нужно изменить краевые условия и проводить интегрирование по формуле (5) следующим образом:

$$\int\limits_{\frac{v(r)}{r}}^{0} d\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int\limits_{r}^{\infty} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{dr}{r}. \qquad (13)$$

Далее аналогично (5)–(12) запишем:

$$\Omega = \frac{v(r_1)}{r_1} = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{0} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{\tau_1}{2\eta} = -\frac{M}{4\pi\eta r_1^2} \qquad (14)$$

или

$$\eta = -\frac{M}{4\Omega\pi r_1^2}. \qquad (15)$$

Этот же результат можно получить в пределе непосредственно из формулы (12):

$$\eta = \lim_{r_2\to\infty}\frac{M\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)}{4\Omega\pi r_1^2} = -\frac{M}{4\Omega\pi r_1^2}. \qquad (16)$$

Иногда в формулах (12) и (16) приписывают сомножителем ускорение свободного падения, что не нужно делать, как легко установить из элементарного анализа размерностей в гостированной системе единиц СИ:

$$\eta\,[\text{Па}\cdot\text{с}] = \eta\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{с}\right] = -\frac{M\,[\text{Н}]}{4\Omega\,[\text{с}^{-1}]\;\pi r_1^2[\text{м}^2]}. \qquad (17)$$

В некоторых старых изданиях в качестве единицы измерения коэффициента внутреннего трения (вязкости) используется пуаз или сантипуаз, поэтому приведем связь между единицами:

$$1\,\text{пуаз} = 10^{-2}\,\text{сантипуаз} = 1\frac{\text{дин}\cdot\text{с}}{\text{см}^2} = 9{,}81\cdot 10^{-2}\,\text{Па}\cdot\text{с};$$

$$1\,\text{дин} = 9{,}81\cdot 10^{-6}\,\text{Н};\ 1\text{Па} = 1\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

(18)

Сомножитель равный ускорению свободного падения в формуле (12) появляется при переводе коэффициента вязкости из сантипуаз в единицы СИ [Па·с].

Во многих конструкциях вискозиметров типа вискозиметра Куэтта внешний цилиндр вращается с угловой скоростью Ω, а момент M измеряется на внутреннем неподвижном цилиндре с помощью торсионных измерительных систем, где момент является реактивным. В этом случае активный момент на внешнем цилиндре и угловая скорость совпадают по знаку. Приведем вывод формулы Маргулеса для данной конструкции, для чего выражение (5) перепишем в виде:

$$\int_0^{\omega(r)} d\omega(r) = \int_0^{\frac{v(r)}{r}} d\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int_{r_1}^{r} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{dr}{r} \quad (19)$$

Далее, следуя выводу (5)–(12), запишем:

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \int_{r_1}^{r} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{dr}{r}; \quad (20)$$

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \quad (21)$$

;

$$\Omega = \omega(r_2) = \frac{v(r_2)}{r_2} = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \quad (22)$$

.

Подставим в (20) реологическое уравнение ньютоновской жидкости и определим распределение скоростей течения по радиусу:

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \int_{r_1}^{r} \frac{M}{2\pi\eta r^2}\frac{dr}{r} = \frac{M}{4\pi\eta}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right);$$

$$v(r) = \frac{M}{4\pi\eta}\left(\frac{r}{r_1^2} - \frac{1}{r}\right). \quad (23)$$

Из (22) получим угловую скорость:

$$\Omega = \omega(r_2) = \frac{v(r_2)}{r_2} = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{\tau}{\eta}\frac{d\tau}{\tau} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\eta}.$$

(24)

Откуда, аналогично (12), получим формулу Маргулеса для определения коэффициента динамической вязкости, с той только лишь разницей, что радиусы поменялись местами:

$$\eta = \frac{M\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{4\Omega\pi r_1^2 r_2^2} \qquad (25)$$

В предыдущих решенных задачах на определенном этапе предполагали, что жидкость подчиняется реологическому уравнению Ньютона. В действительности при вискозиметрировании пищевых сред, особенно большой вязкости, это предположение не корректно. Мы не знаем вида реологического уравнения среды, а именно определение этого уравнения является целью ротационного вискозиметрирования, как и капиллярного вискозиметрирования, где эта проблема решалась с помощью уравнения Рабиновича.

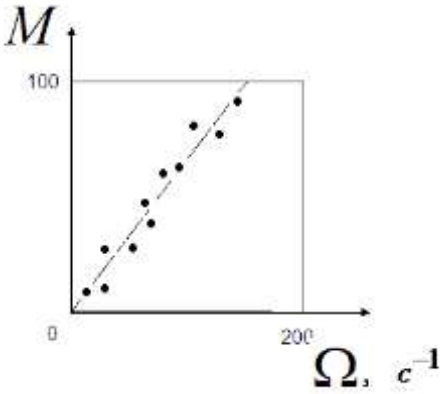


Рис. 6.2. Результаты измерений на ротационном вискозиметре

Расставить точки, составить таблицу и, задав радиусы вискозиметра, по методу средних по формуле Маргулеса рассчитать коэффициент динамической вязкости.

$$\eta_{cp} = \frac{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{4\pi r_1^2 r_2^2} \frac{\sum_1^{20} M_i}{\sum_1^{20} \Omega_i}$$

С помощью ПК провести расчет по методу наименьших квадратов и определить статистические параметры-стандартную ошибку и коэффициент корреляции..

Выводы:

Учитывая вышеизложенное, ротационная вискозиметрия требует проверки следующих требований, вытекающих из условий вывода предыдущих формул:

1. При вискозиметрии надо исключить концевые эффекты параллельными опытами на роторах разной длины и одного радиуса.

2. Необходимо обеспечить ламинарность течения.

Нужно проверить отсутствие пристенного проскальзывания.

3. Проверять среду на тиксотропию и реопексию.

4. Для жидкостей с ньютоновской вязкостью можно использовать формулу Маргулеса, для неньютоновских жидкостей при обработке данных вискозиметрирования надо использовать формулу Павловского.

Тема работы № 7. Явление релаксации напряжений в вязко-упругой среде Максвелла

Цель работы: Изучить понятие «релаксация напряжений»

Задачи:

изучить механическую и математическую модель среды Максвелла;

задать реологические константы среды;

изучить с помощью программы Mathcad процесс релаксации.

Ход работы.

Гуковское линейно-упругое твердое тело и ньютоновская линейно-вязкая жидкость в некотором смысле представляют собой две крайние модели линейных тел. Между тем многие пищевые среды в деформационных процессах проявляют одновременно упругие и вязкостные свойства. Такие пищевые среды называются вязкоупругими. Для них можно построить ряд промежуточных моделей.

Одной из простейших вязкоупругих моделей является механическая модель тела или жидкости Максвелла, которая представляет собой последовательное соединение тел Гука и Ньютона. Символьная формула модели имеет вид $M = N - H$.

Символьная формула	Механическая модель	Математическая модель	Примечания
M = N – H		$\gamma = \gamma_H + \gamma_N$	Модель Максвелла

Математическая модель Максвелла строится в предположении, что деформация (пусть для определенности это будет деформация простого сдвига) в некоторой точке среды представляет собой сумму упругой деформации и деформации течения, инерционными эффектами можно пренебречь:

$$\gamma = \gamma_H + \gamma_N \,, \qquad (1)$$

где γ – общая деформация сдвига; γ_H – упругая деформация тела Гука; γ_N – деформация течения тела Ньютона.

Из реологических уравнений тел Гука и Ньютона запишем:

$$\dot{\gamma}_N = \frac{\tau}{\eta} \,; \;\; \gamma_H = \frac{\tau}{G} \,; \;\; \dot{\gamma}_H = \frac{\dot{\tau}}{G} \qquad (2)$$

где η – коэффициент динамической вязкости; G – модуль сдвига (модуль упругости второго рода).

Продифференцируем уравнение (1.92) по времени и подставим выражения (1.93):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_H + \dot{\gamma}_N \,; \\ \dot{\gamma} &= \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\dot{\tau}}{\eta} \,; \\ \tau &= \eta\,\dot{\gamma} - \left(\frac{\eta}{G}\right)\dot{\tau} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Последнее уравнение (1.94) называется реологическим уравнением тела Максвелла. С помощью этого уравнения, например, можно проанализировать процесс релаксации напряжений в среде при постоянной деформации:

$$\gamma = const \,; \dot{\gamma} = 0 \,; \dot{\tau} + \left(\frac{G}{\eta}\right)\tau = 0. \qquad (4)$$

Решение дифференциального уравнения (1.95) имеет следующий вид:

$$\tau = e^{\lambda t}; \dot{\tau} = \lambda e^{\lambda t}; \lambda e^{\lambda t} + \left(\frac{G}{\eta}\right) \lambda e^{\lambda t} = 0; e^{\lambda t} \neq 0; \lambda = \frac{G}{\eta}, \quad (5)$$

откуда:

$$\tau = Ce^{-\frac{G}{\eta}t}. \quad (6)$$

Константу интегрирования C находим из условия, что в начальный момент времени известно начальное напряжение:

$$t = 0; \ \tau = \tau_0; \ C = \tau_0. \quad (7)$$

Тогда процесс релаксации напряжений при постоянной деформации описывается уравнением

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{G}{\eta}t}. \quad (8)$$

С течением времени в теле Максвелла при постоянной деформации напряжение экспоненциально стремится к нулю:

$$\lim_{t \to \infty} \tau = \lim_{t \to \infty} \tau_0 e^{-\frac{G}{\eta}t} = 0. \quad (9)$$

Заметим также, что отношение динамической вязкости к модулю упругости имеет размер времени ($с^{-1}$). Тогда

$$t_1 = \frac{\eta}{G}; \ \frac{\tau_1}{\tau_0} = e^{-\frac{G}{\eta}t_1} = e^{-1} \approx 0{,}37; \quad (10)$$

$$\tau_1 = 0{,}37\,\tau_0. \quad (11)$$

За время t_1 начальное напряжение уменьшается на 37 %. Это время иногда называют временем релаксации (рис. 7.1.).

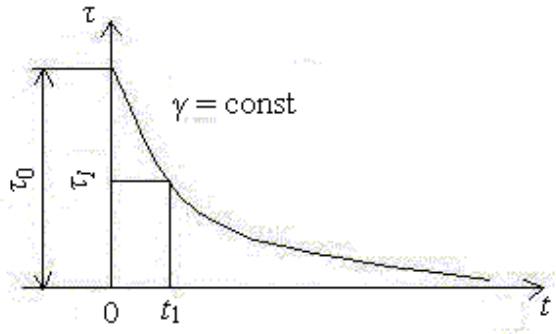


Рис. 7.1. Кривая релаксации напряжений

С позиции наглядной механической модели эта математическая модель представляет собой последовательное соединение пружины (тело Гука) и демпфера (жидкость Ньютона).

Ход решения.

Релаксация напряжений.

Построить с помощью математической программы Mathcad или какой-либо другой программы (в крайнем случае вручную по точкам) две кривые релаксации напряжений и графики их производных по времени при условиях;

η – коэффициент динамической вязкости из первого домашнего задания;

$\tau_0 = 100,$, Па;

В первом случае $G = \eta$;

Во втором случае $2G = \eta$.

Например :

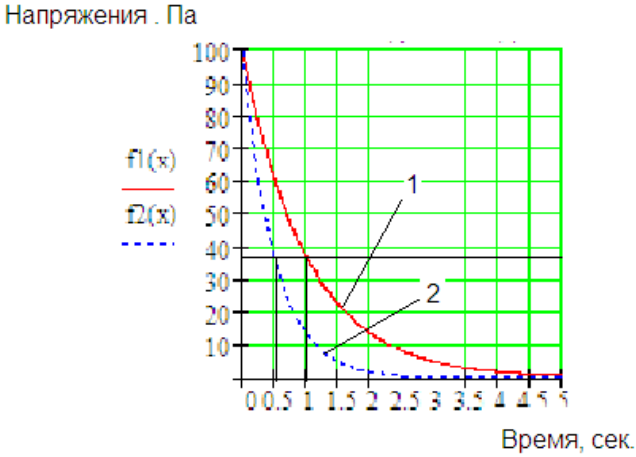


Рис.7.2. Кривые релаксации напряжений, построенные с помощью программы Mathcad на ПК

Выводы:

1. Во многих реальных материалах, поведение которых можно описать уравнением вязкоупругого тела Максвелла, при постоянной деформации во времени самопроизвольно уменьшается напряжение, приближаясь асимптотически к нулю.
2. Интенсивность падения напряжения можно характеризовать временем релаксации, за которое напряжение уменьшается до 0,37 первоначального напряжения.

Тема работы № 8. Явление ползучести в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта

Цель работы:

изучить понятие «ползучесть»

Задачи:

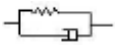
изучить механическую и математическую модель среды Кельвина-Фойгта;

задать реологические константы среды;

изучить с помощью программы Mathcad процесс ползучести.

Ход работы.

Если соединить пружину и демпфер параллельно, то получим наглядную модель тела Кельвина–Фойгта.

Символьная формула	Механическая модель	Математическая модель	Примечания
K = H | N		$\tau=\eta\dot{\gamma}+G\gamma$	Модель Кельвина–Фойгта

Если соединить пружину и демпфер параллельно, то получим наглядную модель тела Кельвина–Фойгта. Реологическое уравнение тела Кельвина–Фойгта получим в предположении, что в некоторой точке среды общее напряжение состоит из суммы напряжения за счет упругости среды и напряжения за счет вязкости жидкости:

$$\tau=\tau_H+\tau_N; \qquad (1)$$

$$\tau=\eta\dot{\gamma}+G\gamma \qquad (2)$$

Уравнение является реологическим уравнением Кельвина–Фойгта, с помощью которого можно изучить процесс ползучести дисперсной среды при постоянных напряжениях.

Для анализа процесса ползучести перепишем дифференциальное уравнение вязкоупругой среды Кельвина-Фойгта в следующем виде :

$$\tau_0 = \eta \frac{d\gamma}{dt} - G\gamma, \qquad (3)$$

где $\tau_0 = \tau = const$ – начальное приложенное напряжение к телу.

В отличие от рассмотрения процесса релаксации напряжений здесь используем прием непосредственного разделения и замены переменных:

$$dt = \frac{d\gamma}{\left(\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma\right)}, \qquad (4)$$

заменим переменные:

$$z = \frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma, \qquad (5)$$

$$d\gamma = -\frac{\eta}{G} dz. \qquad (6)$$

Новое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$dt = -\frac{\eta}{G} \cdot \frac{dz}{z} \qquad (7)$$

Его решение имеет вид:

$$t = -\frac{\eta}{G}\ln z + C \quad (8)$$

или:

$$t = -\frac{\eta}{G}\left[\ln\left(\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma\right)\right] + C \quad (9)$$

Константу интегрирования находим из начальных условия: $t = 0; \gamma = 0.$

Тогда получим выражение:

$$t = -\frac{\eta}{G}\left[\ln\left(\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma\right)\right] + \frac{\eta}{G}\ln\frac{\tau_0}{\eta} \quad (10)$$

Используя свойства логарифмов, потенцируем правую часть полученного уравнения и получим выражение:

$$\ln\frac{\tau_0 - G\gamma}{\tau_0} = -\frac{G}{\eta}t \quad (11)$$

и

$$\frac{\tau_0 - G\gamma}{\tau_0} = e^{-\frac{G}{\eta}t} \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right) \qquad (13)$$

Очевидно при $t = 0; \qquad e^{-\frac{G}{\eta}t} = 1; \quad \gamma = 0.$ (14)

При $t = \infty; \quad \lim\limits_{t\to\infty} \gamma = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{\tau_0}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right)\right] = \frac{\tau_0}{G}$ (15)

Формула (1.115) и выражения (1.116) и (1.117) позволяют построить график процесса ползучести.

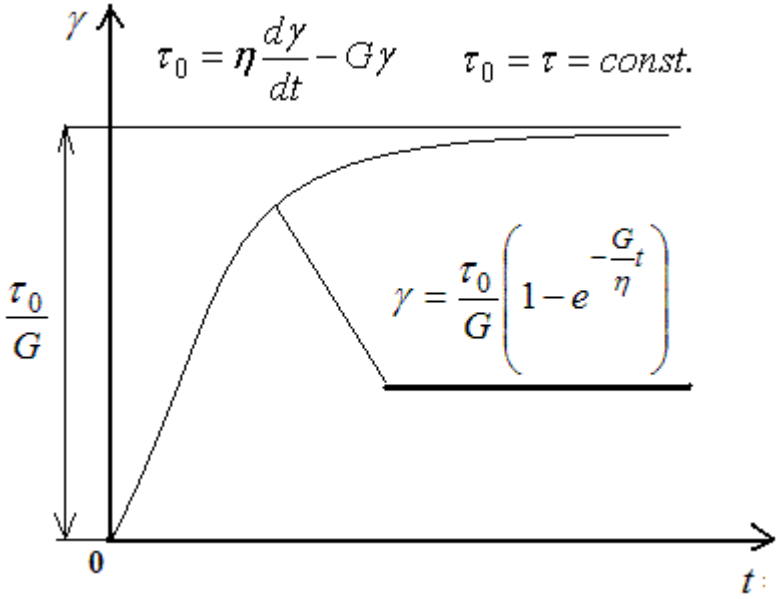


Рис. 8.1. График процесса ползучести
по модели Кельвина – Фойгта

Построить с помощью математической программы Mathcad или какой-либо другой программы (в крайнем случае вручную по точкам) две кривые ползучести и графики их производных по времени при условиях;

η – коэффициент динамической вязкости из первого домашнего задания;

$\tau_0 = 100$, Па;

В первом случае $G = \eta$;

Во втором случае $2G = \eta$.

Например:

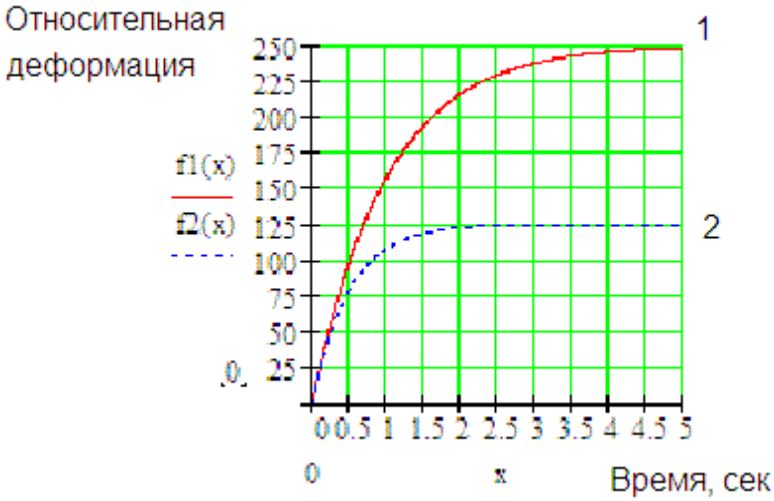


Рис. 8.2. Кривые ползучести, построенные с помощью программы Mathcad на ПК

Выводы:

1. Во многих реальных материалах, поведение которых можно описать уравнением вязкоупругого тела Кельвина-Фойгта, при постоянном напряжении во времени самопроизвольно растет деформация.

2. Изменение деформации во времени подчиняется экспоненциальному закону и асимптотически приближается к соотношению напряжение и модуля упругости.

Тема работы № 9. Метареологические испытания пищевых продуктов

Цель работы: ознакомиться с понятием «метареология».

Задачи:

изучить упрощенное дифференциальное уравнение среды типа Кельвина-Фойгта;

провести эксперименты на процесс одноосного сжатия продукта;

рассчитать модуль упругости и коэффициент динамической вязкости.

Ход работы.

Исследования пищевых продуктов методами реологии и психологии потребителя относятся к метареологии или психореологии и дают ценную информацию для управления биотехнологическими процессами.

В нашей работе по психореологическим свойствам профилактического витаминизированного хлеба «ВИТАМЕТ» было показано, что тактильная оценка свежести хлеба потребителем моделируется математически дифференциальным уравнением вязкоупругой среды Кельвина-Фойгта с добавлением упругого элемента Гука. Символьная реологическая формула хлеба «ВИТАМЕТ» тогда имеет вид:

$$H—H \mid N, \qquad (1)$$

где H – символ упругого тела Гука;

N – символ вязкой среды Ньютона;

H | N – символ среды Кельвина-Фойгта.

Механической поведение этой модели хлеба описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d\ \sigma}{dt}+\left(\frac{E_1+E_2}{\mu}\right)\sigma=E_1\frac{d\ \varepsilon}{dt}+\left(\frac{E_1E_2}{\mu}\right)\varepsilon, \quad (2)$$

где σ – напряжение сжатия ;

ε – деформация сжатия;

E_1, E_2 – модули упругости первого рода;

μ – аналог коэффициента динамической вязкости при сжатии.

Тактильную пробу свежести хлеба потребителем можно представить себе, как последовательность следующих деформации:

1.Мгновенная упругая деформация с модулем упругости E_1, при котором в модели игнорируются инерционные составляющие, поскольку скорости тактильных деформации малы;

2. Деформация ползучести при постоянном напряжении сжатия, при котором количественно процесс определяется сочетанием величин модуля упругости E_2 и коэффициента вязкости μ.

Психологически при ручной пробе свежий хлеб не должен деформироваться только упруго, как резиновый мячику (первый вид деформации), но должен также проявить свойства вязкоупругой ползучести (второй вид деформации).

Схема установки для экспериментального исследования мгновенных деформаций и ползучести хлеба «ВИТАМЕТ» имеет вид :

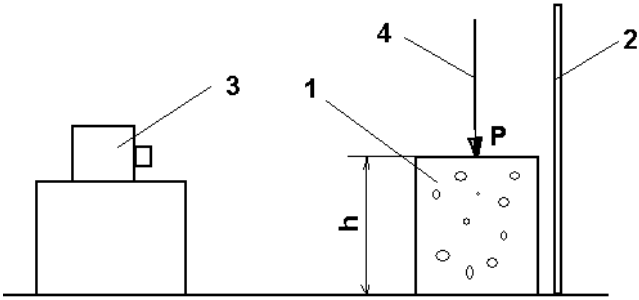


Рис. 9.1. Схема установки. 1- образец хлеба «ВИТАМЕТ», 2 – мерная линейка, 3 – видеокамера, 4 - вектор вертикальной нагрузки

Опыты проводить по изложенной в нашей работе методике.

С помощью программы Mathcad 14 построить экспериментальную кривую ползучести (Рис. 9.2) свежего хлеба «ВИТАМЕТ», где g1 – первый модуль упругости первого рода, кГ/мм ^{2} ; g2 – второй модуль упругости первого рода, кГ/мм ^{2} ; v – коэффициент динамической вязкости, кГ *с/мм ^{2} ; t0 – постоянное напряжение сжатия, кГ/мм ^{2}

$g1 := 2.67 \cdot 10^{-3}$ $g2 := 1.78 \cdot 10^{-3}$ $v := 3.32 \cdot 10^{-3}$ $t0 := 2.67 \cdot 10^{-4}$

$$f(x) := \left[\left(\frac{1}{g1}\right) + \frac{\left[1 - e^{\left(\frac{-g2 \cdot x}{v}\right)}\right]}{g2}\right] \cdot t0$$

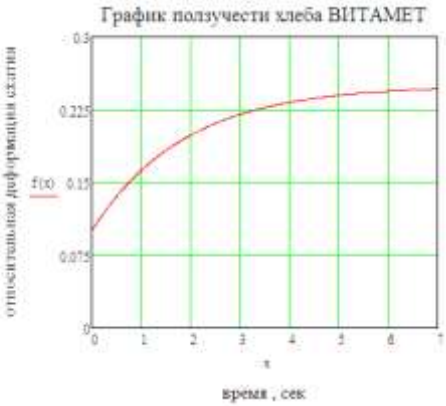


Рис. 9.2. Экспериментальная кривая ползучести хлеба «ВИТАМЕТ»

Полученная модель дает количественное основание для регулирования технологией и рецептурой (в основном – водой) свойств хлеба, наиболее полно удовлетворяющих требования потребителей и отслеживания процесса старения хлеба при хранении в части реологических свойств.

В хлебе «ВИТАМЕТ» в управлении реологическими свойствами необходимо было уменьшать или полностью исключить влияние вязкой составляющей в компоненте Максвелла, поскольку именно она ответственна за остаточную пластическую компоненту деформации, величину которой сенсорно оценивает потребитель.

Математически описание идеальных структурно-механических свойств хлеба «ВИТАМЕТ» выглядит следующим образом:

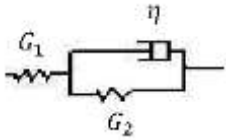


Рис. 9.3. Механическая модель хлеба «ВИТАМЕТ»

Дифференциальное реологическое уравнение хлеба «ВИТАМЕТ» по механической модели, приведенной на рис. 1, будет иметь вид:

$$\frac{d\ \tau}{dt} + \left(\frac{G_1 + G_2}{\eta}\right)\tau = G_1 \frac{d\ \gamma}{dt} + \left(\frac{G_1 G_2}{\eta}\right)\gamma \quad , \qquad (1)$$

где τ – напряжение сдвига ;

γ – деформация сдвига;

G_1, G_2 – модули упругости сдвига;

η – коэффициент динамической вязкости.

Рассмотрим методику проведения реометрических опытов для определения реологических констант вязкоупругой модели. Покажем, что эти константы можно определить на основе опытов на ползучесть. Ползучесть происходит при $\tau = const$.

Тогда $\frac{d\ \tau}{dt} = 0$ и решение находится простым разделением переменных в дифференциальном уравнении (1) и интегрированием:

$$\left(\frac{G_1 + G_2}{\eta}\right)\tau_o = G_1 \frac{d\ \gamma}{dt} + \left(\frac{G_1 G_2}{\eta}\right)\gamma \qquad (2\ )$$

и

$$\gamma(t) = \left[\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\left(1 - e^{-\frac{G_2 t}{\eta}}\right)\right]\tau_o \qquad (3\ )$$

Графически кривая ползучести выглядит следующим образом (рис. 9.3):

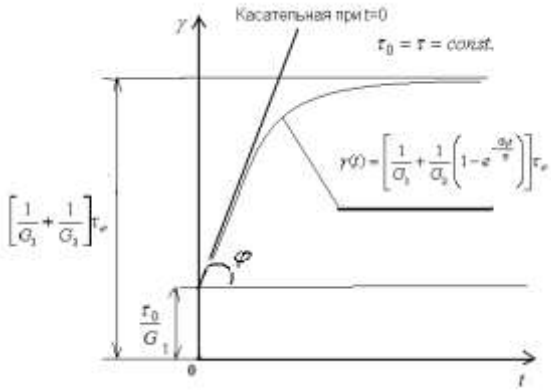


Рис. 9.3. Кривая ползучести хлеба «ВИТАМЕТ»
Очевиден предел

при

$$t=\infty; \quad \lim_{t\to\infty}\gamma=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\left(1-e^{-\frac{G_2 t}{\eta}}\right)\right]\tau_0=\left[\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right]\tau_0. \quad (4)$$

А при $t=0; \quad \gamma=\dfrac{\tau_0}{G_1}$ (5)

Измерив деформации в начальный и в конечный момент времени при известном начальном напряжении τ_0, находим модули упругости G_1 и G_2.

Производная по времени кривой ползучести геометрически представляет собой тангенс угла касательной к кривой:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)=\frac{\tau_o}{\eta}e^{-\frac{G_2 t}{\eta}} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|\ (t=0)=\frac{\tau_o}{\eta}=\tan\varphi \quad (7)$$

Откуда находим коэффициент динамической вязкости элемента в модели Кельвина-Фойгта для хлеба «ВИТАМЕТ» . Рецептура и технология этого хлеба была построена в направлении достижения требований психореологии и биотехнологии.

Выводы:

1. При всей важности учета реологических свойств теста в процессе производства хлеба , эти показатели особенно не интересуют потребителей, которые в быту обычно оценивают свежесть хлеба по его вязкоупругим свойствам, деформируя хлеб и зрительно отслеживая процесс восстановления следа деформации.

2. Поскольку в этом органолептическом (сенсорном) процессе проявляются кроме вязкоупругих структурно-механических свойств хлеба также элементы психологии потребителей, то исследования в данном направлении относят к психореологии или по классификации М. Рейнера, к метареологии.

3. Основы психореологии были созданы работами Скотт–Блэра, Московица, Боурна и многими другими реологами . Психореологические исследования приобретают широкую географию –это США, Германия, Япония, Чехия и многие другие страны. Психореологические исследования актуальны – в конце 2010 года в университете Нюрнберга была защищена диссертация на психореологическую тему, психореологические темы начинают включать в современные учебные программы.

Глоссарий

Вискозиметр – прибор для определения вязкости вещества. Коэффициент динамической вязкости измеряется в паскалях в секунду (Па*с).

Вя́зкость – одно из явлений переноса, свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

Ламинарное течение – течение, при котором жидкость или газ перемещается слоями без перемешивания и пульсаций (то есть беспорядочных быстрых изменений скорости и давления).

Ньютоновская жидкость – это вязкая жидкость, подчиняющаяся в своём течении закону вязкого трения Ньютона, то есть касательное напряжение и градиент скорости линейно зависимы. Коэффициент пропорциональности между этими величинами называется коэффициентом динамической вязкости.

Реология – наука о течении и деформациях реальных материалов.

Литература

1. Физико-механические свойства сырья и готовой продукции: Учебное пособие / В. А. Арет, Б. Л. Николаев, Л. К. Николаев. – СПб.: ГИОРД, 2009. – 537 с.
2. www.open-mechanics.com
3. Забодалова Л.А., Маслов А.М. Изучение структурных особенностей молока и молочных продуктов с помощью реологических методов: метод. Ук.-Л.:ЛТИХП,1987. – 39 с.
4. Азаров Б.М., Арет В.А. Инженерная реология пищевых производств. –- М.: Московский технологический институт пищевой промышленности, 1978.- 110 с
5. Горбатов А.В. Реология мясных и молочных продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1979. – 383 с.
6. Мачихин Ю.А., Мачихин С.А. Инженерная реология пищевых материалов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 216 стр.
7. Структурно-механические характеристики пищевых продуктов: Справочник/Под ред. А.В.Горбатова. – М.: Легкая промышленность, 1982. – 296 с.
8. Рогов И.А., Горбатов А.В., Свинцов В.Я. Дисперсные системы мясных и молочных продуктов. – М.: Агропромиздат, 1990. – 320 с.
9. Реометрия пищевого сырья и продуктов: Справочник /Под ред. Ю.А. Мачихина. – М.: Агропромиздат, 1990. – 271 с.

Учебное электронное издание

Арет Вальдур Аулисович
Байченко Лариса Александровна
Забодалова Людмила Александровна
Ишевский Александр Леонидович

Расчетно-графические работы по инженерной реологии

Главный редактор А. Будер
Литературный редактор М.М. Костина
Верстка П.Н. Баранов

Подписано в печать 16.05.2012
Санкт-Петербург.
Почтовый адрес: 198334, Санкт-Петербург, а/я 77.
Тел./факс: (812) 923-2-239
e-mail.: intermedia.ph@gmail.com
www.intermedia-publishing.ru
при поддержке www.open-mechanics.com