АРЕТ В. А., РУДНЕВ С. Д.

РЕОЛОГИЯ
И ФИЗИКО–МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
МАТЕРИАЛОВ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
ИЦ Интермедия
2014

УДК641.1:532.135(075)
ББК51.23:22.251я73
А80

Рецензенты:

Алексанян А. Ю. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологических машин и оборудования Астраханского государственного технического университета

Бредихин С. А. – доктор технических наук, профессор кафедры технологического оборудования пищевых предприятий Московского государственного университета пищевых производств

Главный редактор *Т.С. Кулакова*
Верстка *А.А. Леонтьева*
Корректура *А.З. Рубинов*

Арет В.А., Руднев С. Д.
А 80 Реология и физико-механические свойства материалов пищевой промышленности : учеб. пособие /В.А. Арет, С.Д. Руднев. — СПб. : ИЦ Интермедия, 2014. — 252 с.

ISBN 978-5-4383-0033-5

В учебном пособии освещены теоретические и экспериментальные аспекты реологии и физико-механических свойств пищевых материалов. Изложены основы инженерной реологии и ее применения в расчетах оборудования для производства пищевых продуктов. Приведены выводы расчетных зависимостей, что облегчает понимание физической и математической сущности рассматриваемых явлений и свойств. Экспериментальные материалы получены на современном исследовательском оборудовании в широких диапазонах изменения параметров, что позволяет проводить их анализ и делать выводы и обобщения.

УДК641.1:532.135(075)
ББК51.23:22.251я73

ISBN 978-5-4383-0033-5

© /В.А. Арет, С.Д. Руднев, 2014
© Издательский центр «Интермедия», 2014

Подписано в печать _____. Формат 60 × 88 1 / 16. Усл. печ. л. 15. Тираж 1000 экз. Заказ № ___.
ООО «Издательский центр “Интермедия”». Адрес: 198334, Санкт-Петербург, ул. Партизана Германа, 41-218. Отпечатано с готового оригинал-макета в ОАО «Первая образцовая типография», филиал «Дом печати – ВЯТКА». Адрес: 610033, Россия, г. Киров, ул. Московская, 122.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ…… 6
ВВЕДЕНИЕ…… 7
ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К КЛАССИФИКАЦИИ ПИЩЕВЫХ МАТЕРИАЛОВ……. 12
1.1 Классификация структур дисперсных систем…….. 14
1.2 Классификация материалов пищевой промышленности……. 15
Контрольные вопросы…… 19
ГЛАВА 2
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКООБРАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ. ОБЩАЯ РЕОЛОГИЯ…….. 20
2.1. Формализации Лагранжа и Эйлера……... 24
2.2 Законы сохранения вещества, количества движения и энергии……. 25
2.3. Дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии…….. 28
2.4 Тензор напряжений……... 30
2.5 Тензор скоростей деформаций……. 33
2.6 Вязкость, упругость, различные реологические эффекты……... 36
2.7 Вязкоупругость…….. 46
2.8 Реологические уравнения сдвигового течения …….. 51
2.9 Феноменологические модели реологических свойств ……. 53
Контрольные вопросы……. 55
ГЛАВА 3
ОСНОВЫ РЕОМЕТРИИ. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ…… 57
3.1 Классификация методов и приборов для определения реологических свойств материалов…….. 57
3.2 Определение структурно-механических характеристик жидких (условно ньютоновских) и жидкообразных продуктов методами капиллярной вискозиметрии…… 62
3.2.1 Теория капиллярных вискозиметров…….. 62
3.2.2 Устройство, принцип действия капиллярных вискозиметров и методики расчета свойств исследуемых материалов……. 71
3.3 Ротационная вискозиметрия…….. 75
3.3.1 Теория ротационных вискозиметров…….. 75
3.3.2 Устройство, принцип действия ротационных вискозиметров и методики расчета свойств исследуемых материалов……. 83
3.4 Теория конических пластометров…….. 87
Контрольные вопросы……... 93
ГЛАВА 4
РЕОДИНАМИКА…….. 95
4.1 Течение среды Гершеля-Балкли в горизонтальной трубе круглого

сечения при наличии пристенного проскальзывания……. 95
4.2 Течение пищевых сред в щелевом канале. ламинарное течение нью-
тоновской жидкости в щелевом канале (в>>h)……. 98
4.3 Течение степенной жидкости в щелевом канале……. 100
4.4 Ламинарное течение неньютоновской жидкости в щелевом канале 103
4.5 Течение пищевых сред в трубах прямоугольного сечения……. 108
4.6 Течение в различных рабочих каналах пищевых машин
и аппаратов……. 108
4.7 Упрощенная линейная теория червячных нагнетателей……. 110
4.8 Расчет червячных экструдеров по методу совмещенных
расходно-напорных характеристик…….. 112
4.9 Сопротивление движению лопасти смесительного агрегата…….. 113
Контрольные вопросы……... 121
ГЛАВА 5
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ……... 122
5.1 Прочность твердых тел…… 122
5.2 Термодинамический подход к прочности……. 124
5.3 Свойства изотропных твердых тел…… 125
5.4 Способы преодоления прочности твердых тел……. 127
5.5 Классификация процессов разрушения (дезинтеграции)……. 132
5.6 Теория Гриффица преодоления прочности упругих материалов…... 132
5.6.1 Разрушение как процесс образования новой поверхности……... 132
5.6.2 Трещины Гриффица……. 138
5.6.3 Решение задачи Гриффица ……. 141
5.7 Процесс образования новой поверхности в телах,
обладающих пластичностью…… 146
5.8 Современные представления о поверхностной энергии ……. 147
5.9 О селективности процесса дезинтеграции…… 153
5.10 Классификация и моделирование растительного сырья с позиции
селективной дезинтеграции…….. 154
5.11 Анализ напряженных состояний моделей двукомпонентных тел,
содержащих поверхность адгезионного взаимодействия……. 157
5.12 Трансформация энергии при деформировании и разрушении
двукомпонентных тел…… 159
5.13 Структурная прочность и механические свойства биологических
тканей и продуктов на их основе……. 161
5.13.1 Микроструктура и состав растительной ткани…… 161
5.13.2 Микроструктура и состав животных тканей…… 166
5.13.3 Физический подход к поверхностным контактам клеток…….. 170
Контрольные вопросы…….. 172
ГЛАВА 6
ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОЧНОСТНЫХ
СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ…….. 174
6.1 Определение и расчёт прочностных свойств материалов

при квазистатической нагрузке……... 174
6.2 Определение и расчёт прочностных свойств материалов
при динамической нагрузке…… 179
6.3 Особенности прочностных свойств и деформационного поведения
материалов биологического происхождения…… 185
6.3.1 Экспериментальные исследования прочностных свойств
связного сырья…….. 185
6.3.2 Прочностные свойства замороженного связного сырья……... 192
6.3.3 Экспериментальные исследования прочностных свойств
несвязного сырья …….. 195
Контрольные вопросы……... 201
ГЛАВА 7
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЫПУЧИХ
МАТЕРИАЛОВ…… 203
7.1 Классификация сыпучих материалов…….. 203
7.2 Оценка дисперсности сыпучих сред. Распределительная функция…. 205
7.3 Плотность и объемная (насыпная) плотность.
Физические свойства сыпучих сред…….. 214
7.4 Поверхностные явления в сыпучих средах…… 215
7.5 Методы исследований поверхностных свойств
сыпучих материалов…… 218
7.6 Компрессионные свойства сыпучих сред……... 226
7.7 Структурно-реологические свойства порошков…… 230
7.8 Вибрационная механика сыпучих сред……... 234
7.8 1 Вибрационные перемещения сыпучих материалов…… 237
7.8.2 Вибрационные состояния сыпучих сред…….. 239
Контрольные вопросы……. 243
Литература……... 245

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие формировалось на основе примерных программ дисциплин «Инженерная реология», разработанной профессорами В. Д. Косым и Я. И. Виноградовым в Московском университете прикладной биотехнологии «Физико-механические свойства сырья и готовой продукции», созданной профессорами Берманом Ю. И. и Зверевым С. В. в Московском университете пищевых производств, утвержденных в 2000 – 2001 годах. Анализ содержания дисциплин выявил, что и та и другая предполагают, что основное внимание должно быть сосредоточено на физических явлениях и эффектах, наиболее широко используемых в технике и технологии переработки пищевых масс. Причем «Инженерная реология» является неотъемлемой частью «Физико-механических свойств…», как будет показано авторами в первой главе. Реология как область знаний является не только неотъемлемой частью, но и теоретической базой дисциплины «Физико-механические свойства…». Особое внимание в пособии уделено природе прочности материалов биологического происхождения и процессам их дезинтеграции.

Целью создания пособия явилось органичное объединение содержания двух дисциплин в единый учебный материал, базирующийся на представлениях о трансформации свойств материалов при повышении концентрации сухих веществ с последующей фрагментацией сплошных твердых тел разрушением (дезинтеграцией) до образования сыпучей среды, влиянии поверхностных взаимодействий в дисперсных системах на свойства материалов в различных состояниях и разнообразных внешних, в том числе циклических, воздействий.

ВВЕДЕНИЕ

Природа, строение и свойства веществ и материалов, из которых состоит окружающий мир, их трансформация и неожиданные проявления всегда интересовали человечество. Области знаний, в которых пристально изучались эти вопросы, это и философия, и физика, и химия и другие науки на стыке этих фундаментальных направлений познания мира. В начале 20 века возникла новая наука – реология.

Моментом возникновения реологии в узком смысле этого термина считается 1919 г., когда вышла работа Бингама. Исторические истоки реологии в широком смысле можно отнести к очень древним временам, когда человечество только начинало осознавать особенности механического поведения окружающего материального мира. Уже в библейских текстах пророчица Дебора в гимне в честь победы Варака над ханаанеянами пела: «Горы потекли перед Творцом». Рейнер для различия между течением жидкостей и твердых тел ввел безразмерный критерий (число) Деборы:

$$D = t_p / t$$

где t_p — время релаксации; t — время наблюдения.

Действительно, геология показывает, что горные породы в геологические масштабы времени проявляют остаточные свидетельства процессов течения. В старых церквях стекла в нижней части окон толще, чем в верхних, значит, стекло при быстрых деформациях разрушается как хрупкий материал, а при медленных воздействиях под собственным весом течет. Греческий философ Гераклит Эфесский (около 540-480 гг. до н. э.) говорил: «panta rei» (все течет). От греческого корня слова «течение» (rheos) и образовано название «реология». Авторство в названии особой отрасли науки — реологии, видимо, следует признать за Бингамом, согласно его статье от 1919 г.

Ценный исторический материал по реологии можно найти в работах Рейнера, Скотт-Блэра, Тимошенко, Веселова, Воларовича.

Веселов отмечает ряд работ по механике, которые можно отнести к древним истокам реологии: работу Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.) «О плавающих телах»; Герона Александрийского (примерно 100 г. н. э.) «Пневматика», в которой описывается эолипил, основанный на принципе действия активной турбины; Александра Афродитского (вторая половина II в. н. э.), который рассматривал взаимодействие корабля, весла и воды.

Одним из наиболее известных законов механического поведения деформируемых тел является закон английского механика и часовщика Роберта Гука, высказанный им в лапидарном виде в 1676 г.: «Ut tensio sic vis» (от лат. — каково удлинение, такова сила). В инженерном сопротивлении материалов он обычно представляется в виде

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где б— нормальное напряжение; E — модуль упругости первого рода (модуль Юнга или Эйлера); ε— относительное удлинение.

Элементы теории движения жидкостей и твердых тел в сопротивляющейся среде ввел Ньютон (1643—1727), с именем которого связан простейший линейный закон вязкого сдвигового течения жидкостей:

$$\tau = \eta\dot{\gamma},$$

где τ — касательное напряжение; η — динамический коэффициент сдвиговой вязкости; $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига.

Бернулли в 1705 г. опубликовал исследование деформации лесы из кишки; он получил параболическую зависимость деформации растяжения от нагрузки, наблюдая таким образом нелинейную упругость. Бернулли — один из основоположников биореологии.

В книге Бернулли «Гидродинамика» (1738 г.) есть задача о течении жидкости в трубе. Задачу течения жидкости в трубе решал также Гаген, однако он полагал, что скорости течения в трубе распределяются по треугольному закону. Правильное решение задачи о распределении скоростей течения в трубе носит имя врача Пуазейля. В реологии широко используются достижения классической гидроаэродинамики, в частности уравнения Навье-Стокса. Основательный, обширный исторический обзор развития этого направления механики можно найти в специальной литературе.

В работах Ломоносова (1711-1765) имеется описание капиллярного вискозиметра, одного из важнейших реометров.

В работах Эйлера (1707-1783) рассматривается движение материальных точек в среде с сопротивлением.

Основы теории упругости заложили Пуассон (1781-1840) и Коши (1789-1857). Учеником Пуассона был Остроградский. Можно отметить работу Пуассона «Мемуар об общих уравнениях равновесия и движения твердых упругих тел» и работу Остроградского «О волнообразном движении жидкости в цилиндрическом сосуде» (1826 г.).

В 1875 г. в Британской энциклопедии была напечатана работа Томсона (лорда Кельвина) «Эластичность». Максвелл в 1868 г. ввел понятие «релаксация напряжений».

Менделеев в 1880 г. указал, что сопротивление движению при малых скоростях пропорционально скорости, а при больших — квадрату скорости. Это отмечается и в работе Рейнольдса (1883 г.). Изменение объема, вызванное сдвигом, наблюдал также Рейнольде, который ввел термин «дилатансия».

В 1883 г. Петров заложил основы гидродинамической теории смазки машин, а в 1885 г. предложил конструкцию вискозиметра.

В 1837 г. Брашман (1796-1866) опубликовал работу «Теория равновесия тел твердых и жидких или статика и гидростатика».

Диссертационные работы ряда выдающихся русских ученых-механиков были связаны с различными вопросами движения жидкостей и газов. Отметим работы Жуковского (1847-1921) «Кинематика жидкого тела», Чаплыгина (1869-1942) «О газовых струях», Котельникова (1865-1944) «О давлении жидкой струи на клин».

Изучая релаксационные процессы в коллоидных растворах желатина, профессор Одесского университета Шведов в 1890 г. применил ротационный прибор с электродвигателем и торсионной подвеской и предвосхитил работу Бингама, создав более общую реологическую модель, частным случаем которой является реологическая модель Бингама. Ученик Шведова Вейнберг проинтегрировал в 1912 г. уравнение Шведова для ротационных вискозиметров.

Механические модели для описания свойств материалов ввели в 1902 г. Пойнтинг и Томсон.

Первыми значительными теоретическими работами по микрореологии считаются статьи Эйнштейна, опубликованные в 1906 и 1911 гг., в которых определен коэффициент кинематической вязкости дисперсной смеси из сферических твердых частиц и ньютоновской жидкости формулой вида

$$\eta = \eta_0 (1 + 0{,}25C),$$

где η— коэффициент вязкости смеси; η_0— коэффициент вязкости жидкости; C — объемная концентрация твердой фазы,

$$C = \pi r^3 N / V .$$

Здесь r— радиус сферических частиц; N — число сферических частиц в объеме V суспензии.

При этом были сделаны следующие предположения:

1. Суспендированные частицы являются жесткими сферами, радиус которых велик по сравнению с радиусом молекул растворителя, но мал по сравнению с характеристическими размерами прибора, в котором производится измерение вязкости, следовательно, влиянием стенок прибора можно пренебречь.

2. Невозмущенное течение в вискозиметре является настолько медленным, что инерционными эффектами можно пренебречь.

3. Растворитель прилипает к поверхности сфер, отсутствует пристенное скольжение.

4. Концентрация суспендированных частиц настолько мала, что они не взаимодействуют друг с другом из-за больших взаимных расстояний, и действие суспендированных сфер аддитивно.

Данное направление получило широкое развитие в дальнейших работах, в которых решались подобные задачи: о дисперсии жестких эллипсоидов и стержней (Джеффери, 1922 г.), дуплетов твердых сфер, соединенных в гантели (Симх, 1949 г.); о вязкости дисперсии пузырьков газа в вязкой жидкости (Гут и Марк, 1933 г.), эмульсии одной жидкости вдругой (Тейлор, 1932 г.); о вязкости дисперсных систем высокой концентрации твердой фазы (Арнштейн и Рейнер, 1945 г.; Муни, 1951 г.; Симх, 1952 г.).

По теоретическим и экспериментальным проблемам определения вязкости жидкостей и дисперсных сред в период 1910—1940 гг. был выполнен ряд значительных исследований. Можно отметить работы Гачека, Френкеля, Бачинского, Широкова.

В период с 1932 по 1937 гг. работы Воларовича и Самариной, а также Шофильда и Скотт-Блэра показали, что мучное тесто представляет собой весь-

ма сложное реологически тело, проявляющее упругие, пластические, вязкоупругие и нелинейно-вязкие свойства, и может быть отнесено к биологическим полимерам сложного состава.

В 1937 г. Мурнаган использовал тензорную символику в теории упругости, с помощью которой Рейнер в 1948 г. объяснил некоторые реологические эффекты второго порядка в вязких и упругих средах. Первое экспериментальное наблюдение эффекта второго порядка в упругости Рейнер приписывает Пойнтингу (1909 г.).

В 1925—1926 гг. Оствальд де Вале и его ученики ввели термин «структурная вязкость», в 1929 г. Рейнер — «неньютоновские жидкости», в том же 1929 г. была опубликована важная работа по теории капиллярных вискозиметров Рабиновича.

В результате работ Мизеса и Хенки к 1924 г. была разработана гипотеза о начале пластического течения материалов в момент, когда удельная энергия формоизменения достигает определенного предела.

В 1947 г. Вейссенберг опубликовал сообщение о весьма любопытном реологическом эффекте, получившем позже его имя.

В 1949 г. в работах Скотт-Блэра и Грина были изложены интегральные методы и психофизические представления в реологии и освещено понятие тиксотропии (термин Фрейдлиха).

Основы отечественной школы реологии заложили такие выдающиеся ученые, как Д. И. Менделеев, Н. П. Петров, С. П. Тимошенко, Л. И. Седов, П. А. Ребиндер, Н. П. Воларович, А. А. Трапезников, Г. В. Виноградов, С. Н. Карпин, Г. Л. Слонимский, Д. М. Толстой, А. Х. Мирзаджанзаде, Н. В. Михайлов, Н. В. Тябин, А. М. Гуткин, Т. Я. Горазовский, Н. Б. Урьев, Я. И. Френкель, Т. И. Гуревич, Ю. Н. Работнов, А.Р. Ржаницын, С. В. Ильюшин, А. Ю. Ишлинский, Г. И. Баренблатт, А. И. Леонов, А. Х. Ким, Л. Г. Лойцянский, П. П. Мосолов, В. П. Мясников, П. М. Огибалов, С. М. Тарг, З. П. Шульман и многие другие.

Применительно к пищевой промышленности и технологии развитие реологии в русской научной литературе началось в 60-е годы, если не претендовать на полноту списка авторов, то благодаря работам П. А. Ребиндера, М. П. Воларовича, К. П. Гуськова, В. П. Калугина, М. Н. Караваева, Н. И. Назарова, О. Г. Лунина, Л. Н. Лунина, Ю. В. Клаповского, В. П. Корячкина, Ю. А. Мачихина, С. А. Мачихина, А. В. Горбатова, И. А. Рогова, В. Д. Косого, Л. К. Николаева, В. А. Арета, Б. А. Николаева, В. А. Панфилова, Ю. С. Рыбаковой, В. Н. Серба, П. М. Силина, В. П. Табачникова, Г. В. Твердохлеб, А. З. Уманцева, Н. Б. Урьева, М. А. Талейсника, Н. Е. Федорова, С. Е. Харина, Г. К. Бермана, И. Э. Груздьева, Г. А. Ересько, С. С. Гуляева-Зайцева, С. В. Чувахина, А. М. Маслова, Б. М. Азарова, Г. Е. Лимонова, О. П. Боровикой, М. М. Благовещенской, В. Вайткуса, Б. Я. Шайхаева и многих других исследователей.

Среди авторов по пищевой проблематике в иностранной литературе можно назвать исторически значительные работы Ф. Н. Шведова, Е. С. Бингама, М. Рейнера, А. Б. Метцнера, У. Л. Уилкинсона, Й. С. Рида, Й. Коха, Н. Грина, Г. В. Скотт-Блэра, Р. К. Шофильда, М. С. Боурне, С. Е. Шарма, А. Финке, Х. Г. Мул-

лера, А.Г. Варда, А. Крамера, В. Твигга, С. Х. Лиина, И. Прайс-Джон, Р. Вейссенберга, В. Зингга, Ш. С. Сулева, С. Д. Моргана, В. П. Валавендера, Те Ю Чена, А. М. Скалзо, Р. В. Дикерсона, И. Т. Пиилера, Р. Б. Рида и т. д.

Заканчивая этот весьма неполный исторический экскурс, следует отметить, что расцвет реологии, особенно ее приложений, начался в 50-е годы в связи с бурным развитием технологии переработки искусственных полимеров, пластических масс и внедрением искусственно структурированных материалов в различные отрасли народного хозяйства.

В последние десятилетия практически во всех работах, посвященных механическим процессам и машинам пищевой промышленности, затрагиваются вопросы инженерной реологии пищи или пищевых материалов. Особенности механики переработки пищевых продуктов и полуфабрикатов в основном и заключаются в реологических особенностях механического поведения этих материалов и в огромном, нарастающем разнообразии машин и аппаратов в этой отрасли промышленности. Поэтому полный исторический обзор работ в данной области может быть предметом отдельного рассмотрения.

Учитывая сравнительную молодость реологии, особенно реологии пищи, сложность проблематики, во многом неустоявшуюся терминологию, видимо, целесообразно будет рассмотреть некоторые терминологические и классификационные вопросы.

Глава 1 ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К КЛАССИФИКАЦИИ ПИЩЕВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Пищевые материалы — сырье, полуфабрикаты и готовая продукция – очень разнообразны по своим структурно–механическим свойствам. Это объясняется, в первую очередь, их природным биологическим происхождением. Растительные и животные ткани содержат макромолекулы, так называемые биополимеры: белки, липиды, полисахариды, клетчатку; сложные и простые минеральные соединения, а также влагу, взаимодействующую с биополимерами всеми возможными формами связи. Изменение концентрации того или иного вещества в продукте (прежде всего воды), химические или физические воздействия значительно влияют на деформационное поведение и напряженное состояние материалов, изменяет характер протекания того или иного технологического процесса.

Тем не менее, классификация материалов биологического происхождения и продуктов на их основе необходима для обоснования адекватных теоретических подходов к описанию их свойств с целью использования в методиках расчета оборудования, применения тех или иных методов исследований и соответствующих измерительных устройств и приборов.

Главным отличительным признаком всех пищевых материалов является их дисперсность и многофазность, все они являются дисперсными системами, обладающими определенной структурой. Структура, то есть внутреннее строение продукта и характер взаимодействия между отдельными ее элементами (частицами) определяется химическим составом, биохимическими показателями, температурой, дисперсностью, агрегатным состоянием и рядом технологических факторов. Прочность структур, их деформационное поведение зависят от типов и величины энергии связей внутри дисперсной системы.

Немецкий исследователь Г. Румпф предложил следующую классификацию возможных связей между частицами в дисперсной системе:

1. Связи твердого тела: спекание, рекристаллизация, нарастание зерна; термическая сварка; заклеивание; затвердевающие связующие вещества; кристаллизация растворяющихся веществ;
2. Связи, обусловленные поверхностным натяжением и капиллярным давлением подвижных свободных поверхностей жидкости: мостики жидкости между отдельными точками частиц; капиллярные силы жидкости, находящейся между твердыми частицами; поверхностное натяжение капли жидкости с частицами твердого тела;
3. Адгезионные и когезиозные силы в мостиках от связанного с частицей связующего вещества: вязкие, затвердевающие и клеящие вещества; адсорбционный слой с толщиной, достаточной для образования мостиков только на возвышениях шероховатостей;
4. Силы взаимного притяжения твердого тела: молекулярные Ван-дер-Ваальсовы силы и валентные связи; силы, обусловленные действием электростатических зарядов;

5. Механические связи: переплетение волокон; помятые пластинки.

Способы приставания частиц друг к другу могут быть самыми разными – с образованием жидких или твердых мостиков связывающего материала, посредством сил Ван–дер–Ваальса или с помощью электростатических сил. В последних двух случаях образование мостиков из какого–либо вещества необязательно. Различные виды механизмов связи могут присутствовать одновременно и налагаться друг на друга.

Особую роль играет *форма связи влаги с сухим веществом* дисперсной системы. Вид или форма связи влаги с продуктом определяют технологические показатели продукта и его структурно–механические характеристики. Выделяют три основные формы связи: химическую, физико–химическую и физико–механическую.

Химическая связь обусловлена ионными или молекулярными взаимодействиями в точных количественных соотношениях; удаляется эта влага из продукта прокаливанием или в результате химических реакций. Она резко отличается по своим свойствам от свободной.

Физико–химическая связь обусловлена адсорбцией влаги в гидратных оболочках или осмотическим удерживанием в клетках в нестрого определенных соотношениях; удаляется из материала испарением, десорбцией (адсорбционная) или вследствие разности концентраций (осмотическая). Адсорбционная влага может иметь иные, чем вода, свойства и способствует диспергированию частиц и пластификации системы, она присуща обычно структурам коагуляционного типа, хотя может существовать и в структурах других типов. Осмотическая влага вызывает набухание тела и присуща нативным дисперсным клеточным структурам.

Физико–механическая связь обусловлена удержанием влаги в ячейках структуры (иммобилизационная), в микро– и макрокапиллярах и прилипанием ее к поверхности частиц или тела (смачивание) в неопределенных соотношениях; удаляется из материала испарением или механическими способами (отжатие, центрифугирование и т. д.). Основная масса воды находится в свободном состоянии и не меняет своих свойств.

При увеличении содержания влаги ее избыток перестает быть связанным с продуктом и самопроизвольно отделяется от него (отстаивание, расслаивание и т. п.).

По преобладанию формы связи влаги продукты можно разделить на коллоидные (физико–химически связанная влага), капиллярно–пористые (физико–механически связанная влага) и коллоидные капиллярно–пористые, имеющие качества, присущие первым и вторым, например мясной фарш, творожно–сырковая масса и т.п.

В соответствии с характером связей в дисперсных системах и состоянием воды в них академиком П.А. Ребиндером была предложена классификация структур дисперсных систем.

1.1 Классификация структур дисперсных систем

Структуры пищевых продуктов по классификации акад. П.А. Ребиндера можно разделить на коагуляционные и конденсационо–кристаллизационные.

Коагуляционные структуры образуются в дисперсных системах путем взаимодействия между частицами и молекулами через прослойки дисперсионной среды за счет Ван-дер-Ваальсовых сил сцепления. Толщина прослойки соответствует минимуму свободной энергии системы. Термодинамически стабильны системы, у которых с поверхностью частиц прочно связаны фрагменты молекул, способные без утраты этой связи растворяться в дисперсионной среде. В свою очередь дисперсионная среда находится в связанном состоянии. Обычно эти структуры обладают способностью к самопроизвольному восстановлению после разрушения (*тиксотропия*). Нарастание прочности после разрушения происходит постепенно, обычно до первоначальной прочности. Толщина прослоек в определенной мере зависит от содержания дисперсионной среды. При увеличении ее содержания значения сдвиговых свойств обычно уменьшаются, а система из твердообразной переходит в жидкообразную. При этом степень дисперсности, т. е. преобладающий размер частиц, даже при одинаковой концентрации фазы оказывает влияние на состояние системы и ее прочность.

При обезвоживании коагуляционных структур (при увеличении содержания дисперсной фазы) прочность их повышается, но после определенного предела они перестают быть тиксотропными. Восстанавливаемость структуры сохраняется в пластично–вязкой среде, когда разрушение пространственного каркаса происходит без нарушения сплошности.

При наибольшей степени уплотнения структуры и наименьшей толщине прослоек жидкой среды восстанавливаемость и пластичность исчезают, кривая прочности в зависимости от влажности дает излом. Такая предельная влажность была определена для некоторых видов колбасного фарша. При этом контакты частиц остаются еще точечными; они могут переходить в фазовые путем спекания или срастания при значительном повышении температур.

Для описания долговечности структуры, например, желатина, альбумина под нагрузкой П. А. Ребиндер с сотрудниками использовали экспоненциальную зависимость С. Н. Журкова. Процесс разрушения рассматривается как термомеханический, когда благодаря тепловому воздействию преодолевается энергетический барьер (энергия активации), ослабленный действием механического напряжения.

При образовании коагуляционных структур во многих продуктах пищевой промышленности существенную роль играют поверхностно–активные вещества и растворенные в воде белки, которые выступают в качестве эмульгаторов и стабилизаторов образуемых систем и могут существенно изменять их структурно–механические характеристики.

Конденсационно–кристаллизационные структуры присущи натуральным продуктам, однако могут образовываться из коагуляционных при удалении дисперсионной среды или при срастании частиц дисперсной фазы в расплавах

или растворах. В процессе образования эти структуры могут иметь ряд переходных состояний: коагуляционно–кристаллизационные, коагуляционно–конденсационные; их образование характеризуется непрерывным нарастанием прочности. Основные отличительные признаки структур такого типа следующие: б*о*льшая по сравнению с коагуляционными прочность, обусловленная высокой прочностью самих контактов; отсутствие тиксотропии и необратимый характер разрушения; высокая хрупкость и упругость из-за жесткости скелета структуры; наличие внутренних напряжений, возникающих в процессе образования фазовых контактов и влекущих за собой в последующем перекристаллизацию и самопроизвольное понижение прочности вплоть до нарушения сплошности, например растрескивание при сушке.

Таким образом, вид структуры продукта обусловливает его качественные и технологические показатели и поведение в процессах деформирования. Для их описания используются кривые течения или деформирования (реограммы), которые связывают между собой напряжение и скорость деформации (или деформацию). Характер реограмм, как правило, дает возможность отнести данный реальный продукт к тому или иному виду реологических тел, соответственно–дисперсных систем.

1.2 Классификация материалов пищевой промышленности

Классификация материалов пищевой промышленности очень важна, т.к. только на основе классификации можно определить, какую теоретическую основу для исследований деформационно–реологического поведения нужно использовать при исследовании данного продукта и расчете оборудования, его перерабатывающего.

П.А. Ребиндер и Н.В. Михайлов предложили разделять реологические тела на *жидкообразные* и *твёрдообразные* в зависимости от характера зависимости эффективной вязкости $\eta_{эф}$ от скорости сдвига γ и от периода релаксации (*период релаксации* – время, в течение которого напряжения в нагруженном теле уменьшается в e = 2,7 раз).

К *жидкообразным* телам относятся ньютоновские жидкости и структурированные системы, не имеющие статического предельного напряжения сдвига ($\theta_{0ст}$ =0), т.е. такие системы текут при приложении сколь угодно малого внешнего воздействия.

К *твёрдообразным* относятся упруго–пластичные и другие тела, обладающие статическим и динамическим предельным напряжением сдвига. Зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига считают основной характеристикой структурно–механических свойств дисперсных систем, так как эффективная вязкость является итоговой характеристикой, описывающей равновесное состояние между процессами разрушения и восстановления структуры в установившемся потоке.

Классификация реологических тел, предложенная проф. Горбатовым А.В.

(таблица 1.1), основана на величине отношения предельного напряжения сдвига θ_0 к их плотности ρ и ускорению свободного падения $[\theta_0/(\rho g)]$. Это соотношение представляет собой меру способности вещества сохранять свою форму.

Таблица 1.1

Классификация тел по физическим параметрам

$\theta_0/(\rho g)$, м	Менее 0,005	0,005–0,02	0,02–0,15	Более 0,15
Наименование вещества	Структурные жидкости	Жидкие пасты	Густые пасты	Твёрдые тела

Б.А. Николаев предложил обобщённую классификацию (от твёрдого до истинно–вязкого состояния) по величине механических свойств: модулей упругости, вязкости и др.. К первой группе относятся твёрдые и твёрдообразные тела (твёрдый жир, целые ткани мяса, сухари, печенье и пр.), ко второй – твердо–жидкие (мясной фарш, творог, студни, мучное тесто и пр.), к третьей – жидкообразные и жидкости (расплавленный жир, бульоны, молоко, мед, вода и пр.).

Наиболее подробную классификацию пищевых дисперсных систем по реологическим свойствам и текстурным признакам предложил Х.Д. Чойшнер. Однако анализ терминологии, примененной Чойшнером, выявил ее несовершенство, а перечень состояний материалов – неполный. Тем не менее, эта классификация наиболее подробна и в достаточной степени наукоемка. Авторы модернизировали классификацию Чойшнера (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Классификация состояний материалов пищевой промышленности

Характеристика состояния материала	Продукт, в том числе сырьё и полуфабрикаты	Типичные реологические свойства	Типичные текстурные признаки
1	2	3	4
1.Чистая жидкость	Вода, растительное масло, фруктовые и ароматические эссенции, спирт и спиртовые растворы	Ньютоновская вязкость	Водянистый, жидкий
2. Чистый расплав	Расплавленные жиры, сахар	Преимущ. ньютоновская вязкость	Жидкий, густой, маслянистый
3.Истинный раствор	Соляные и сахарные растворы, экстракты	Преимущ. ньютоновская вязкость	Жидкий, густой

Продолжение табл. 1.2

1	2	3	4
4.Коллоидный раствор	Белковые растворы, мутные фруктовые и ягодные соки	Ньютоновская вязкость, возможна вязкоупругость и тиксотропия	Жидкий, густой, слизистый
5.Жидкообразное	Суспензии (какао, фруктовые и овощные соки), эмульсии (молоко, сливки, майонез, сгущенное молоко с сахаром)	Ньютоновская и неньютоновская (эффективная) вязкость, тиксотропия, вязкоупругость	Жидкий, густой, кремообразный, тягучий, вязко-текучий, клейкий
6.Пастообразное	Фруктовое пюре, творог, творожные изделия	Эффективная упругость и пластическая вязкость, вязкоупругость, тиксотропия, реопексия	Густой, клейкий, кремообразный, слизистый, тягучий, резинообразный
7.Связанное мягкое	Сливочное масло, желе, йогурт, сметана, молочные десерты, мясные фарши, тесто	Пластическая вязкость, тиксотропия, упругость, вязкоупругость	Мягкий, мажущийся, скользкий, кремообразный, пастообразный, клейкий, эластичный
8.Связанное полутвердое	Плавленый сыр, цукаты, фруктовые подварки, джем, колбасы, хлеб, незамороженое мясное сырьё	Упругость, пластическая вязкость, вязкоупругость	Мягкий, крепкий, резинообразный, вязкий
9.Прочное	Натуральные сыры, изюм, курага, шоколад, глазури, сырокопченые колбасы	Упругость, пластическая вязкость, вязко-упругость	Мягкий, прочный, хрупкий, ломкий, вязкий
10. Твердое	Карамель, печенье, ядра орехов, замороженное мясное сырье	Упругость, твердость, хрупкость	Крепкий, твердый, хрупкий, ломкий, стекловидный

Продолжение табл. 1.2

1	2	3	4
11.Сыпучее	Корнеплоды, зерно, крупы, мука, сухое молоко, сахар, соль	Упругость, вязкоупругость, внутреннее трение, предельное напряжение сдвига	Сыпучий, плотный, сухой, текучий

Сопоставляя различные критерии классификаций материалов пищевой промышленности, предпримем попытку обобщить их и максимально приблизить к физическим определениям агрегатных состояний вещества, дать *техническую классификацию материалов*.

Жидкие тела (жидкости) – материалы, содержащие одну фазу, обладают текучестью, принимают форму сосуда, являются конденсированными дисперсными системами, связанными преимущественно центральными Ван–дер–Ваальсовыми силами, основным свойством которых является вязкость – постоянная величина в изотермическом процессе. В приведенной классификации жидкими телами являются первое — третье состояние материалов, обладающих ньютоновской вязкостью. Поведение и свойства жидкостей изучаются учебной дисциплиной «Гидравликой».

Жидкообразные тела – материалы, проявляющие в изотермическом процессе в зависимости от деформационного состояния эффективную вязкость, зависящую от скорости деформации, пластичность, являются многофазными дисперсными системами с коагуляционной либо коагуляционно–кристализационной структурами, в которых действуют разнообразные по природе поверхностные силы, основными свойствами которых являются эффективная неньютоновская или пластическая вязкость и предельное напряжение сдвига (предел текучести). В классификации (табл. 1.2) к таким телам относятся четвертое – седьмое состояния. Деформационное поведение и свойства таких материалов – область знаний, охватываемая научным направлением под названием «*Реология*».

Твердые тела – объекты, длительное время сохраняющие свою форму при отсутствии физических или химических воздействий, являющиеся кристаллизационными либо конденсационно–кристализационными дисперсными системами, основным свойством которых является прочность, обусловленная преимущественно дисперсионными силами взаимодействия между частицами твердой фазы. Согласно классификации твердыми телами являются седьмое – десятое состояние материала (таблица 1.3), которым присущи упругость, эластичность, упруговязкость, твердость и хрупкость.

Необходимо выделить отдельное состояние твердых тел, когда их количество придает новое качество всей совокупности, но не является каким–то новым агрегатным состоянием, как и в случае с жидкообразными телами.

Сыпучие материалы – совокупность твердых тел, проявляющая специ-

фические свойства, характерные как для жидкостей (текучесть и способность принимать форму сосуда), так и для твердых тел в условиях напряженного состояния, являющиеся дисперсными системами "твердое тело – газ", в которых определяющую роль играют поверхностные силы взаимодействий между частицами (отдельными твердыми телами), а также – соотношение веса частиц и сил поверхностных взаимодействий между ними. Когда исследователями рассматривается напряженно–деформационное состояние сыпучей среды, либо же ее течение, то применяют терминологию теории сплошных сред – напряжение, деформация, вязкость и пр. В этом случае сыпучие материалы терминологически определяют как сыпучие тела.

Последовательность изложения материала в учебном пособии следует приведенной классификации: реологические свойства жидкообразных материалов → свойства твердых тел → свойства сыпучих продуктов.

Контрольные вопросы

1. Какой главный отличительный признак всех пищевых материалов?
2. Классификация возможных связей между частицами в дисперсной системе Г. Румпфа.
3. Какие формы связи влаги с сухим веществом вы знаете?
4. Чем обусловлена химическая связь влаги с материалом?
5. Чем обусловлена физико–химическая связь влаги с материалом?
6. Чем обусловлена физико–механическая связь? влаги с материалом
7. Как классифицировал акад. П.А. Ребиндер структуры пищевых продуктов?
8. Дайте характеристику коагуляционных структур.
9. Дайте характеристику конденсационно–кристаллизационных структур.
10. Что обусловливает переход коагуляционных структур в конденсационно–кристаллизационные?
11. Что такое тиксотропия?
12. Как предложил классифицировать реологические тела профессор Горбатов А.В.?
13. Какие состояния вещества положены в модернизированную классификацию Чойшнера?
14. Изложите техническую классификацию материалов.
15. Какие материалы являются жидкими телами (жидкостями), каким состояниям вещества они соответствуют?
16. Какие материалы являются жидкообразными телами каким состояниям вещества они соответствуют?
17. Какие материалы являются твердыми телами, каким состояниям вещества они соответствуют?
18. Какие материалы являются сыпучими материалами, каким состояниям вещества они соответствуют?
19. Когда допускается использовать термин «сыпучие тела»?

Глава 2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКООБРАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ. ОБЩАЯ РЕОЛОГИЯ

Поведение *жидкообразных* материалов под нагрузкой изучает *инженерная реология* — наука о приложении реологии к расчетам и конструированию машин и аппаратов пищевой промышленности, управлению технологическими процессами переработки пищевых продуктов. *Реология* — это широкая область науки о течении и деформациях реальных тел.

Имеется два определения реологии. **Первое**, где *реология* — это наука о деформациях и течении различных материалов. В этом определении заключается стремление сравнительно новой науки к обобщению известных сведений наряду с открытием новых механических явлених, эффектов и теорий. При данном взгляде на реологию ее подразделами становятся такие сложившиеся дисциплины, как механика грунтов и сыпучих материалов, сопротивление материалов, гидроаэродинамика, теория упругости, пластичности, ползучести, т. е. дисциплины механического цикла, в которых отказываются от гипотезы абсолютно твердого тела, широко используемой в курсе теоретической механики.

Второе говорит о реологии как науке о деформациях и течении материалов, проявляющих существенные отклонения от свойств классических моделей ньютоновских жидкостей, твердых упругих гуковских тел и сенвенановских тел сухого трения. При таком подходе подчеркивается специфический предмет исследования, проясняется практическая причина возникновения новой науки — реологии.

Инженерная реология пищи или пищевых производств в том же смысле, что и сопротивление материалов, не представляет собой науку, а является учебной дисциплиной; без знания ее сегодня образование инженера пищевой промышленности не является полным, ибо материалы, переработка которых ведется пищевыми машинами, как правило, негуковские и неньютоновские тела, и их поведение, в частности сопротивление воздействию рабочих органов, курсами сопротивления материалов и гидравлики не освещается.

Инженерная реология пищевой промышленности дает необходимые инженеру сведения из теоретической реологии, знакомит с результатами реологических испытаний пищевых материалов, методами расчета пищевых машин и аппаратов с учетом реологических особенностей перерабатываемого ими продукта и предлагает принципы объективного приборного контроля качества продуктов и управления технологическими операциями и процессами.

В инженерной реологии пищевых производств можно условно выделить четыре части:

1) общую реологию, или реологию пищевых материалов. Эта часть содержит основные сведения из общей теоретической реологии, отобранные с целевым назначением для инженера-пищевика;

2) реометрию пищевых материалов. В данной части рассматриваются экспериментальные методы и результаты измерения реологических свойств

пищевых материалов, особенности их проявления при взаимодействии перерабатываемого продукта с рабочими органами машин и каналами аппаратов;

3) реодинамические расчеты. Эта часть посвящена расчетным моделям, дающим количественную теоретическую оценку результатов взаимодействия пищевых сред с рабочими органами и каналами машин и позволяющим проводить необходимые технологические расчеты машин (производительность, потребная мощность и т. п.);

4) реологические основы оптимизации, интенсификации, контроля и управления в пищевой промышленности.

Инженерную реологию пищи целесообразно изучать на последних курсах вуза, поскольку для ее нормального усвоения нужны как знания из высшей математики, теоретической механики, сопротивления материалов, гидравлики, так и знания из курсов процессов и аппаратов, общей технологии пищевых производств и определенные навыки самостоятельной работы, появляющиеся на старших курсах.

Для удобства самостоятельной работы с литературой, что является обязательным условием успешного усвоения курса, в конце пособия приведен список литературы. Он также позволяет использовать данное пособие в своей работе аспирантам и научным работникам. В пособии приведен ряд задач, решение которых поможет усвоению курса.

В научной литературе в качестве эквивалента реологии часто используется термин академика Ребиндера «*физико–химическая механика*», которую по классификации Рейнера можно отнести к *теоретической реологии*. Как правило, объекты реологии не укладываются в простейшие линейные модели гидроаэродинамики течения газов, идеальных или идеально–вязких ньютоновских жидкостей или в линейные модели теории упругости и пластичности идеально–пластичных или упругих гуковских тел. Обусловлены эти нелинейные механические свойства многокомпонентностью дисперсного состава перерабатываемых материалов в химической, строительной, пищевой и других отраслях промышленности. Следует отметить, что многие результаты классической теории механики сплошных сред, гидроаэродинамики, теории упругости, пластичности и ползучести успешно применяются в моделировании процессов переработки пищевых материалов. В этом смысле реология является разделом общей механики сплошных сред и тесно связана с классической механикой.

Инженерная реология, кроме непосредственного изучения реологических свойств реальных материалов, рассматривает также использование этих свойств для построения расчетных моделей машин и аппаратов перерабатывающей промышленности и для управления технологическими процессами (в рамках данного пособия) для нужд пищевой промышленности.

Феноменологическая реология изучает поведение материалов в предположении, что они однородные или квазиоднородные сплошные среды. Квазиоднородные материалы — условно однородные материалы, когда в рассматриваемых процессах переработки можно пренебречь наличием в дисперсных средах различных твердых включений в силу малости последних.

Макрореология рассматривает материалы как однородные и лишенные структуры, каковыми они предстают при рассмотрении невооруженным глазом. Обычно пищевые материалы представляют собой дисперсные системы из нескольких фаз и могут рассматриваться как квазиоднородные в макрореологии, когда размеры наибольшей из диспергированных частиц меньше малых элементов материала, деформации которых исследуются. Например, конфетная масса типа пралине включает в себя частицы ореха, которые обычно значительно меньше размеров конфет, деформации которых исследуются, или меньше габаритных размеров формующих каналов матриц, в которых рассматривается течение пралиновой массы.

Материал считается изотропным или квазиизотропным, если самый малый элемент объема материала содержит анизотропные диспергированные частицы всевозможных ориентации. Иногда квазиизотропные материалы можно сделать анизотропными путем деформаций.

Микрореология учитывает квазиоднородность и квазиизотропность и реологическое поведение дисперсных материалов, исходя из известных реологических свойств составляющих материал элементов. В качестве примера можно привести работу Эйнштейна о вязкости суспензии из простой вязкой жидкости и твердых сферических шариков.

Одним из разделов феноменологической реологии является *метареология*, где реологические исследования граничат с химией, биологией, физикой, психофизиологией, экономикой и другими науками. Так, покупатель оценивает свежесть хлебобулочных изделий, проведя реологический «эксперимент»: деформирует хлеб и, следя за его вязкоупругим поведением, оценивает усилие деформации и восстанавливаемость изделия после деформации. Психофизиологические и реологические свойства сливочного масла или маргарина при намазывании их на хлеб тоже можно отнести к метареологии. Вообще органолептические оценки качества многих пищевых продуктов относятся к метареологии или *психореологии*, например оценка «на глаз» вязкостных свойств сметаны, зернистости творога, консистенции мясного фарша и т. п. При исследовании биологических процессов в живых организмах, например в системе кровообращения, в мышечных тканях, широко используются данные *биореологии*, реологии крови.

Приборы, устройства и методики определения реологических свойств материалов образуют раздел феноменологической реологии, которая называется *реометрией*. Среди наиболее распространенных приборов реометрии можно назвать различные *вискозиметры* и *пластометры*. Если в экспериментальных данных реометрии удается разделить свойства, действительно принадлежащие объекту измерений, и свойства, принадлежащие измерительному прибору, то реологические параметры объекта измерения можно отнести к *приборно–инвариантным* данным реометрии, и эти данные можно использовать для построения математических реодинамических моделей процессов переработки материала.

Контроль и управление технологическими процессами не всегда требуют

данных инвариантной реометрии, достаточно использовать *относительные реометрические параметры* материала, измеряемые на конкретном реометре, и связать эти параметры с другими показателями технологического процесса (температурой, плотностью, компонентным составом дисперсной среды и др.), произведя, таким образом, своеобразное тарирование системы контроля и управления.

В целом, проблема разделения в экспериментальных данных информации об объекте измерений и приборе является общей проблемой экспериментов, поскольку любой прибор так или иначе воздействует на объект измерений и может изменить измеряемые свойства объекта, особенно при механических испытаниях материала. При решении этой проблемы полезными могут оказаться теории распознавания образов и статистической проверки гипотез.

В ряде случаев, в силу сложности процессов переработки дисперсных сред и трудностей создания адекватной математической модели на основании общей теории сплошных сред, необходимо проведение экспериментов на моделях перерабатывающих устройств с использованием методов теории подобия, планирования экспериментов и распознавания образов. Такие эксперименты можно назвать *имитационной реометрией*.

Одним из основных понятий реологии является *деформация* — относительное смещение частей или частиц тела, не нарушающее непрерывности среды тела, что позволяет использовать математический аппарат бесконечно малых, интегральное и дифференциальное исчисление, оперировать непрерывными функциями, удовлетворяющими условиям Дирихле,
т. е. равномерно ограниченными, имеющими не более конечного числа точек разрыва первого рода и не более конечного числа точек максимума и минимума. Это обычные положения механики сплошных сред, позволяющие, в частности, использовать разложение функций в ряды Фурье при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Деформация проявляется в виде:

– *упругих деформаций*, обратимых при снятии нагрузки;

– *пластических деформаций (течения)*, необратимых при снятии нагрузки и растущих непрерывно и неограниченно при постоянных нагрузках;

– *вязкого течения*, характеризуемого тем, что оно возникает при любых сколь угодно малых, отличных от нуля нагрузках, и скорость деформаций растет при росте нагрузок.

Пластические деформации возникают при достижении нагрузок определенной величины, называемой *пределом текучести* данного материала. Многие пищевые материалы по мере роста нагрузок проявляют все перечисленные виды деформаций: вначале деформируются упруго, затем начинают пластически течь и при дальнейшем росте нагрузок текут вязко.

2.1. Формализации Лагранжа и Эйлера

К изучению движения среды обычно подходят с точки зрения формализации Лагранжа или Эйлера. При лагранжевом описании движения элементарные частицы отождествляют с понятием материальной точки и задают уравнения их движения

$$x_i = x_i(a_i, b_i, c_i, t),\ i = 1,\ 2,\ 3, \qquad (2.1)$$

где x_i – координаты точки; a_i, b_i, c_i, – переменные Лагранжа, обычно координаты начального положения точек; t – время.

Заметим, что, во–первых, если перейти к обобщенным координатам и обобщенным силам, ввести линейно зависящие от скорости силы сопротивления (жидкое вязкостное трение при ламинарном течении ньютоновской жидкости), диссипативную функцию Релея, то ряд задач течения и задач механики для неконсервативных механических систем можно решать с помощью известных из классической аналитической механики дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода; во–вторых, эти уравнения (в данном случае исторически эти уравнения будет справедливо назвать уравнениями Эйлера–Лагранжа) по существу являются условиями стационарности в вариационном исчислении некоторого функционала, что показывает возможность отождествления краевых задач о течении жидкости в форме дифференциальных уравнений движения и эквивалентных задач вариационного исчисления поиска экстремума некоторого функционала. Такая замена формулировки задач течения будет показана в дальнейшем и при численном решении может дать определенные преимущества.

При эйлеровом описании движения задают поле деформаций или скоростей как функции пространственных координат и времени, как бы следя за поведением частиц, проходящих через фиксированные точки пространства, в отличие от лагранжевого подхода, когда следят за движением определенной частицы по непрерывным точкам пространства. Кроме того, при эйлеровой формализации используется разработанный математический аппарат теории поля. Например, в гидродинамике при эйлеровом подходе поле скоростей задают в виде

$$\nu_i = \nu_i(x, y, z, t),\ i = 1,\ 2,\ 3,$$

где ν_i– компоненты скорости частицы (проекции вектора скорости на координатные оси); x, y, z – координаты точек пространства.

В переменных Эйлера малые деформации элемента среды можно описать тензором деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}, \qquad (2.2)$$

где ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}– относительное удлинение (укорочение) граней элементов, расположенных вдоль осей x, y, z ; ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz} – сдвиг (изменение прямых углов) после деформации в соответствующих плоскостях.

Аналогично образуется тензор скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zx} \\ \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{Bmatrix}, \qquad (2.3)$$

При деформациях в точках сплошной среды возникают напряжения, которые характеризуются тензором напряженного состояния

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}, \qquad (2.4)$$

где σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} – нормальные напряжения; σ_{yx}, σ_{zx}, σ_{zy} – касательные напряжения.

Изучение связи (составление определяющих уравнений состояния) между тензорами напряжений, деформаций, скоростей деформаций, временем, температурой и параметрами состава материала является общей задачей реометрии. Располагая этими реологическими уравнениями, используя дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии и определенные краевые и начальные условия, можно математически моделировать различные технологические процессы переработки пищевых материалов, проводить реодинамические расчеты оборудования.

2.2 Законы сохранения вещества, количества движения и энергии

Законы сохранения вещества, количества движения и энергии, или аксиоматические принципы, лежат в основе построения дифференциальных уравнений неразрывности, движения и энергии пищевой среды и ничем не отличаются от законов, лежащих в основе гидродинамики различных жидкостей. Отличия реодинамики от гидродинамики будут проявляться только в реологических уравнениях или в уравнениях состояния, связывающих компоненты тензо-

ра напряжений с компонентами тензора скоростей деформаций, плотность, температуру, давление и какие-нибудь другие свойства пищевой среды. Например, у многих пищевых дисперсных сред плотность существенно зависит от давления, реологические свойства пищевых сред из-за микробиологических и химических процессов могут меняться во времени при неизменности параметров внешней среды.

Закон сохранения вещества математически можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_V \rho\,\mathrm{d}V = -\oint_S \left(\vec{n}\rho\vec{\mathrm{v}}\right)\mathrm{d}S, \tag{2.5}$$

где V– объем выделенного элемента пищевой среды; $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S в данной точке; $\vec{\mathrm{v}}$ – скорость течения пищевой среды в данной точке; $\rho\vec{\mathrm{v}}$ – вектор количества движения, отнесенного к единице объема любой частицы пищевой среды, если считать ее однородной.

При составлении уравнения (2.5) предполагали, что масса вещества накапливается внутри фиксированной в пространстве замкнутой контрольной поверхности S произвольной формы и размеров и содержит элемент пищевой среды объемом V. Левая часть уравнения определяет скорость накапливания массы внутри контрольной поверхности, а правая часть представляет собой результирующий перенос вещества вовнутрь объема через контрольную поверхность.

Закон количества движения формулируем аналогично, рассматривая пищевую среду внутри замкнутой поверхности, которая движется вместе со средой. Хотя элемент пищевой среды может изменять свою форму произвольным образом, поскольку скорости частиц пищевой среды являются функциями времени и координат точки пространства, однако объем внутри контрольной поверхности содержит постоянную массу пищевой среды. Тогда, поскольку по второму закону Ньютона скорость (производная по времени) изменения количества движения элемента равняется сумме сил, действующих на этот элемент, можно записать

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_V \rho\vec{\mathrm{v}}\,\mathrm{d}V = \vec{F} + \vec{G}, \tag{2.6}$$

где $\vec{F}$ – главный вектор поверхностных сил, действующих только на частицы, лежащие на внешней поверхности рассматриваемого объема жидкости, например сил гидростатического давления, действующих нормально к поверхности, а также касательных сил трения об окружающий объем жидкости или сил трения о стенки канала аппарата; $\vec{G}$ – главный вектор массовых или объемных сил, действующих на все частицы рассматриваемого объема жидкости, например силы тяжести, электростатических или магнитных сил.

Объемные и поверхностные силы тоже можно представить в виде интегралов:

$$\vec{G} = \oint_V \rho \vec{g}\, \mathrm{d}V, \tag{2.7}$$

$$\vec{F} = \oint_S [\vec{n}\sigma] \mathrm{d}S, \tag{2.8}$$

где $\vec{g}$ – вектор внешней силы, зависящий от пространственных координат; $[\vec{n}\sigma]$ – поверхностная сила, отнесенная к единице площади; σ – тензор напряжений в рассматриваемой точке.

Следовательно, второй закон Ньютона в интегрально–дифференциальной форме теоремы об изменении количества движения (см. курс теоретической механики) для рассматриваемого элемента жидкости можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_V \rho \vec{v}\, \mathrm{d}V = \oint_S [\vec{n} \cdot \sigma] \mathrm{d}S + \oint_V \rho \vec{g}\, \mathrm{d}V. \tag{2.9}$$

При выводе уравнения энергии рассматривается тот же элемент жидкости внутри произвольной замкнутой поверхности, которая движется вместе с жидкостью и представляет собой термодинамически замкнутую систему. Следовательно, скорость изменения общей энергии элемента жидкости должна быть равна сумме количества тепла, передаваемого элементу в единицу времени, и работы, совершаемой над элементом в единицу времени. Этот энергетический баланс по аналогии с законами сохранения вещества и количества движения можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_V \rho U\, \mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_V \frac{1}{2} \rho (\vec{v} \cdot \vec{v})\, \mathrm{d}V = \\ &= -\oint_S (\vec{n} \cdot \vec{q})\, \mathrm{d}S + \oint_V (\vec{v} \cdot \rho \vec{g})\, \mathrm{d}V + \oint_S (\vec{n} \cdot [\sigma \vec{v}])\, \mathrm{d}S, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где U – внутренняя (потенциальная) энергия; $\vec{q}$ – вектор теплового потока, направленный по внешней нормали к поверхности.

В левой части уравнения записаны соответственно скорости изменения потенциальной и кинетической энергии элемента жидкости, отнесенные к единице массы жидкости. В правой части уравнения первый интеграл представляет собой скорость притока тепла через полную поверхность выделенного элемента жидкости (знак минус обусловлен направлением вектора теплового потока по внешней нормали к поверхности); второй интеграл — работу в единицу времени массовых сил, отнесенных к единице объема, действующих на все частицы, заключенные внутри контрольной поверхности; третий интеграл — работу в единицу времени поверхностных сил, приходящихся на единицу площади в любой точке поверхности. Поскольку все названные работы отнесены к единице времени, то уравнение (2.10) можно назвать уравнением баланса мощностей.

2.3. Дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии

Единообразная форма трех законов физики позволяет с помощью теоремы о дивергенции преобразовать интегралы по поверхности к интегралам по объему, а затем по правилу Лейбница о дифференцировании определенных интегралов по параметру поменять последовательность дифференцирования и интегрирования. Полученные уравнения дают возможность записать дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии пищевой среды, спроектировать эти уравнения на оси координат и решать различные краевые задачи течения, если известны дополнительно реологические уравнения или уравнения состояния дисперсной пищевой среды.

Итак, после названных преобразований законы физики могут быть записаны в виде

$$\oint_V \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + (\nabla \cdot \rho \vec{v}) \right] \mathrm{d}V = 0, \tag{2.11}$$

$$\oint_V \left[\left(\rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} \right) - [\nabla \cdot \sigma] - \rho \vec{g} \right] \mathrm{d}V = 0, \tag{2.12}$$

$$\oint_V \left[\rho \left(\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} \right) + \rho \vec{v} \left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} \right) + (\nabla \cdot \vec{q}) - (\vec{v} \cdot \rho \vec{g}) - (\nabla [\sigma \cdot \vec{v}]) \right] \mathrm{d}V = 0. \tag{2.13}$$

В прямоугольных координатах дифференциальный оператор и полный дифференциал определяются равенствами

$$\nabla = \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \; i = 1,2,3, \tag{2.15}$$

где v_i – проекция скорости потока на ось x_i.

Тогда уравнение неразрывности для пищевой среды приобретет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{v}) = 0. \tag{2.16}$$

Следуя определению полной производной и раскрывая выражение для слагаемого, содержащего дивергенцию, запишем

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0, \tag{2.17}$$

В проекциях на прямоугольную систему координат x, y, z:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0. \tag{2.18}$$

Аналогично запишем уравнение движения:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}-\left[\nabla\cdot\sigma\right]-\rho\vec{g}=0. \tag{2.19}$$

Положительный тензор соответствует отрицательному гидростатическому давлению *p*, а давление дает только дополнительный эффект к нормальным силам; это давление можно исключить из тензора напряжений, вычитая *p* из каждого диагонального члена тензора σ. Следовательно, можно ввести новый тензор напряжений τ:

$$\tau=\sigma+p\delta, \tag{2.20}$$

$$\delta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

или

$$\delta_{ij}=\left(\delta_i\delta_j\right);\quad \delta_{ij}=0,\quad i\neq j;\quad \delta_{ij}=1,\quad i=j \tag{2.22}$$

и

$$\tau_{ij}=\sigma_{ij}+p\delta_{ij}. \tag{2.23}$$

Теперь уравнение движения можно записать следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right)=-\nabla p+\left[\nabla\cdot\tau\right]+\rho\vec{g}. \tag{2.24}$$

Проецируя уравнение (2.24) на оси прямоугольных координат *x, y, z*, получим уравнения движения пищевой среды в скалярной форме:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x; \tag{2.25}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y; \tag{2.26}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z; \qquad (2.27)$$

После ряда подобных преобразований можно получить уравнение энергии в прямоугольных координатах:

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)-$$
$$-AT\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+A\left(\tau_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+ \qquad (2.28)$$
$$+A\left[\tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+\tau_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right],$$

где A – термический эквивалент работы; c_v – удельная теплоемкость пищевой среды при постоянном объеме.

Тепловой поток связан с градиентом температуры в изотропной среде законом теплопроводности Фурье:

$$q=-\lambda\nabla T, \qquad (2.29)$$

где λ – коэффициент теплопроводности пищевой среды. Формулы (2.28) и (2.29) позволяют решать термодинамические задачи расчетов переработки пищевых сред.

2.4 Тензор напряжений

В инженерной реологии пищевых дисперсных сред предполагается в основном рассматривать задачи течения, поэтому рассмотрим выражение для поверхностной силы вязкого сопротивления, приходящейся на единицу некоторой площадки, произвольно ориентированной в пространстве в прямоугольной системе координат. Вырежем мысленно элементарный тетраэдр, вершина которого совпадет с началом системы координат (рис. 2.1). Ориентация площадки определяется единичным вектором $\vec{n}$, скорость течения среды — вектором $\vec{v}$; Δn — расстояние от начала координат до произвольной площадки, до основания тетраэдра.

На рис. 2.1 показаны три напряжения, которые вызваны силами, действующими в направлении оси x_1. Первый индекс указывает на ориентацию поверхности, к которой приложена сила; второй индекс — на направление, вдоль которого действует сила. Например, σ_{31} обозначает тангенциальную силу, отнесенную к единице площади, т. е. напряжение, действующее на грань, перпендикулярную оси x_3, в направлении вдоль оси x_1.

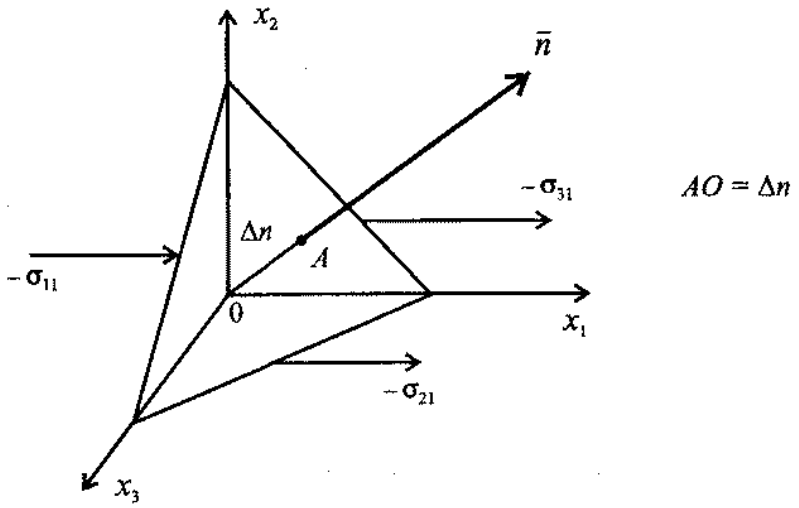


Рис. 2.1 – Элементарный тетраэдр

Если обозначить площади граней тетраэдра, находящихся в координатных плоскостях, через ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 и стянуть тетраэдр в точку начала координат, то можно составить уравнения равновесия для компонент силы, действующей на наклонную площадку:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\Delta S_1\sigma_{11} - \Delta S_2\sigma_{21} - \Delta S_3\sigma_{31};\\ F_2 &= -\Delta S_1\sigma_{12} - \Delta S_2\sigma_{22} - \Delta S_3\sigma_{32};\\ F_3 &= -\Delta S_1\sigma_{13} - \Delta S_2\sigma_{23} - \Delta S_3\sigma_{33}; \end{aligned} \qquad (2.30)$$

Обозначив площадь наклонной площадки через ΔS, уравнения равновесия можно записать так:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\Delta S\left[n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31}\right] = -\Delta S\sum n_i\sigma_{i1};\\ F_2 &= -\Delta S\left[n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32}\right] = -\Delta S\sum n_i\sigma_{i2};\\ F_3 &= -\Delta S\left[n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33}\right] = -\Delta S\sum n_i\sigma_{i3}; \end{aligned} \qquad (2.31)$$

где n_1, n_2, n_3 проекции нормального единичного вектора на оси координат.
Вектор силы можно представить в виде суммы компонент:

$$\vec{F} = \sum_i \delta_i F_i, \qquad (2.32)$$

где δ_i – единичные вектора вдоль ортогональных осей координат.

Подставив в уравнение (2.32) выражения компонент вектора силы из уравнений равновесия, получим

$$\vec{F} = -\Delta S\sum_i \delta_i \sum_j n_j\sigma_{ij}. \qquad (2.33)$$

Заметим, что для симметричного тензора σ произведение на единичный нормальный вектор к наклонной площадке имеет вид

$$\left[\vec{n}\sigma\right] = \sum_i \delta_i \sum_j n_j\sigma_{ji}. \qquad (2.34)$$

Значит сила, приходящаяся на единицу площади, может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\vec{F}}{\Delta S} = -[\vec{n}\sigma]. \tag{2.35}$$

В пределе стягивания тетраэдра в точку величина $[\vec{n}\sigma]$ представляет собой силу, приходящуюся на единицу наклонной площадки, ориентацию которой характеризует нормальный единичный вектор $\vec{n}$. Величина σ называется тензором напряжения в данной точке и записывается в матричной форме:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

Для доказательства симметричности этого тензора выделим из среды плоскостями, параллельными координатным плоскостям, прямоугольный параллелепипед (рис. 2.2), вращение которого могут обусловить тангенциальные силы F_1, F_2, F_3, F_4.

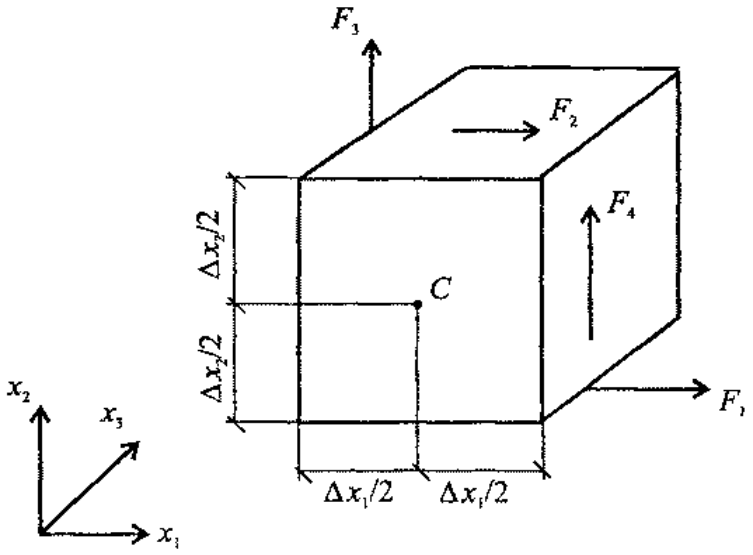


Рис. 2.2 – Выделенный из среды параллелепипед

Силы на гранях параллелепипеда можно выразить через диагональные компоненты тензора напряжений и размеры тела. Например:

$$F_1 = \left(\sigma_{21} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{2} \right) \Delta x_1 \Delta x_3; \tag{2.37}$$

$$F_2 = \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{2} \right) \Delta x_1 \Delta x_3; \tag{2.38}$$

Затем вычисляются моменты этих сил относительно оси, проходящей через точку центра масс параллелепипеда и параллельной оси x_3:

$$M_1 = -F_1 \frac{\Delta x_2}{2}; \quad M_2 = -F_2 \frac{\Delta x_2}{2}. \tag{2.39}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 &= -\sigma_{21} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3; \\ M_3 - M_4 &= \sigma_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Теперь можно записать уравнение вращательного движения параллелепипеда:

$$\varepsilon J_c = (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \tag{2.41}$$

где момент инерции параллелепипеда относительно оси вращения, проходящей через центр масс, определяется выражением

$$J_c = \frac{1}{12} \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2). \tag{2.42}$$

Тогда уравнение движения приобретает вид

$$\frac{\varepsilon}{12} \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2\right) = (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \tag{2.43}$$

и очевидно, что

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}. \tag{2.44}$$

Аналогично, рассматривая вращение вокруг двух остальных ортогональных осей, можно доказать равенство других диагональных элементов тензора напряжений:

$$\sigma_{31} = \sigma_{13}; \ \sigma_{23} = \sigma_{32}. \tag{2.45}$$

Следовательно, тензор напряжений в точке среды симметричный.

2.5 Тензор скоростей деформаций

Рассмотрим движение частиц среды при простом сдвиге (рис. 2.3). Пусть частицы *a* и *b*, находящиеся на расстоянии ds в направлении единичного вектора $\vec{n}$, перемещаются вдоль оси x в положения *a*' и *b*'.

Изменение начального расстояния d*x* вдоль оси *x* определяется выражением

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t - v_x \, \mathrm{d}t. \tag{2.46}$$

Тогда скорость удаления частиц друг от друга в направлении оси *x* равна

$$\frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathrm{d}y. \tag{2.47}$$

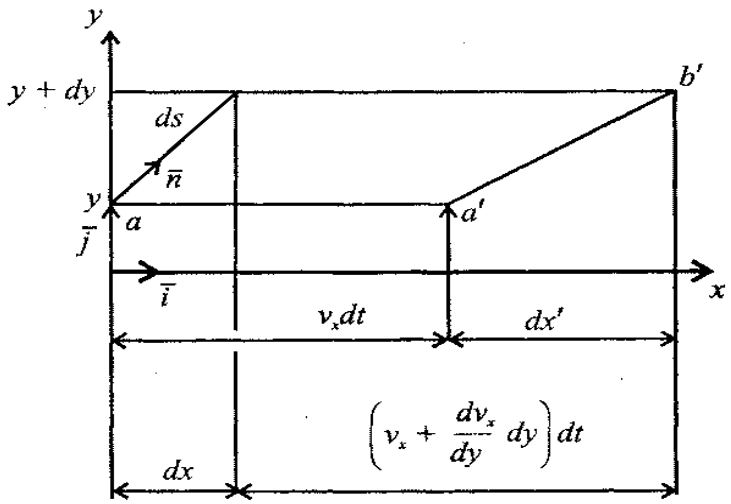


Рис. 2.3 – Схема простого сдвига

При движении частиц в произвольном направлении получим

$$\frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z. \qquad (2.48)$$

Согласно рис. 2.3 можно записать

$$\mathrm{d}x = n_x \mathrm{d}s;\ \ \mathrm{d}y = n_y \mathrm{d}s;\ \ \mathrm{d}z = n_z \mathrm{d}s; \qquad (2.49)$$

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}. \qquad (2.50)$$

Если отнести скорость удаления частиц вдоль оси x к первоначальному расстоянию ds, то получим

$$\frac{\mathrm{d}s' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}n_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}n_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}n_z. \qquad (2.51)$$

Правая часть уравнения (2.51) представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{n}$ и диады $\nabla\vec{v}$, которая имеет компоненты $\partial v_i / \partial q_j$, где $v_i = v_x, v_y, v_z$, $q_i = x, y, z$. Тогда можно записать тензор градиентов скоростей вида

$$\dot{\gamma}_{is} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (2.52)$$

На основе предыдущих рассуждений, но рассматривая не скорости, а смещения частиц, можно записать тензор градиентов смещений:

$$\gamma_{is} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (2.53)$$

Оба тензора (2.52) и (2.53) несимметричны, но путем добавления и вычитания половины того же, но транспонированного тензора можно получить сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Идея симметризации очевидна из равенства

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial q_j} + \frac{\partial v_j}{\partial q_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial q_j} - \frac{\partial v_j}{\partial q_i}\right). \qquad (2.54)$$

Тогда

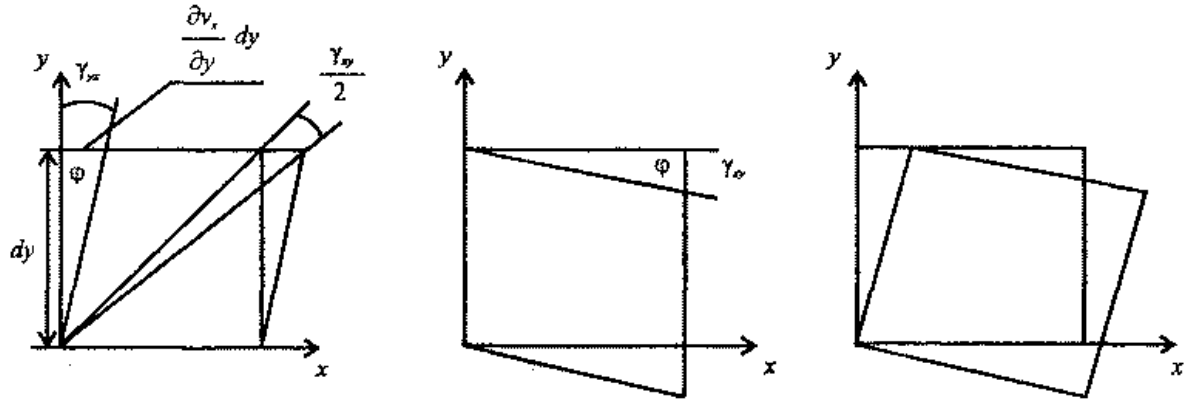
$$\dot{\gamma}_{is} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.55)$$

Аналогично разлагается тензор градиентов смешений (2.52). На простом плоском примере можно видеть, что компонента антисимметричного тензора смещений

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \gamma_{yx} - \gamma_{xy}$$

представляет собой наложение двух простых сдвигов, которые в сумме описывают поворот недеформированных элементов материала (рис. 2.4).



$$\gamma_{yx} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right] / dy; \quad \gamma_{xy} = -\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} \partial x \right] / \partial x$$

Рис. 2.4 – Схема наложения двух сдвигов

Очевидно, что второе слагаемое в правой части уравнения (2.55) — антисимметричный тензор — описывает вращение элемента среды без течения. Исследование таких движений является предметом кинематики и динамики твердых тел. Симметричный тензор рассматривается в теории упругости, пластичности, в гидродинамике. В любом курсе этих дисциплин можно ознакомиться с более подробным выводом тензоров (2.52), (2.53) и (2.55).

В реологии связь между тензором (2.53) и тензором напряжений либо постулируется, либо находится экспериментально; совместно с уравнениями неразрывности, движения, энергии, краевыми и начальными условиями они позволяют составить замкнутую систему дифференциальных уравнений для решения различных инженерных задач.

2.6 Вязкость, упругость, различные реологические эффекты

Понятие «*вязкость*» является одним из важнейших в реологии и поэтому требует отдельного рассмотрения. Во многих случаях вязкость в смысле коэффициента вязкости не всегда приемлема в реологии пищевых масс. Например, утверждение, что коэффициент вязкости определенного хлебного теста составляет столько-то паскаль-секунд, по существу, не корректно, поскольку тесто не является ньютоновской жидкостью, для которой коэффициент вязкости есть функция скорости сдвига. В реологической литературе встречаются термины «вязкость по Гепплеру», «вязкость по Энглеру» и другие подобные определения.

Остановимся вначале на элементарных представлениях о вязкости материалов. Наиболее употребимым является определение *вязкости как свойства пищевого материала противодействовать сдвиговому течению*, хотя некото-

рые пищевые среды обладают еще выраженной существенной объемной вязкостью. Будем считать, если это специально не обговаривается, что *под течением подразумевается состояние движения среды, при котором изменение скоростей сдвига вызывает изменение противодействующих течению сил внутреннего трения, касательных напряжений.* При пластическом сдвиговом течении это противодействие считается постоянным. Тогда *коэффициент динамической вязкости можно определить как меру интенсивности противодействующих сдвиговому плоскопараллельному течению сил внутреннего трения в материале*. Линейный закон вязкого течения Ньютона можно записать в виде

$$\mathrm{d}F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}S, \tag{2.56}$$

где dF – сила внутреннего трения на элементарной площадке; η –коэффициент динамической вязкости; $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ – градиент скорости движения слоев в направлении, перпендикулярном к поверхности слоев (скорость сдвига); dS – площадь элементарной площадки.

$$\mathrm{d}F = \frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}(\rho\upsilon)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}S = \nu\frac{\mathrm{d}(\rho\upsilon)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}S, \tag{2.57}$$

где ρ – плотность материала (масса единицы объема); υ – коэффициент кинематической вязкости.

$$\mathrm{d}F = G\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}S, \tag{2.58}$$

где G модуль упругости сдвига; $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ градиент сдвига в направлении, перпендикулярном к плоскости сдвига.

$$\mathrm{d}M = D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t, \tag{2.59}$$

где dM – масса первого компонента, которая переносится за время dt через элементарную площадку dS в направлении нормали x к рассматриваемой площадке в сторону убывания плотности первого компонента; D – коэффициент диффузии; $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x$ градиент плотности.

$$\mathrm{d}Q = \lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t, \tag{2.60}$$

где dQ – количество тепла, которое переносится за время dt через элементарную площадку dS в направлении нормали x к рассматриваемой площадке в сторону убывания температуры; λ – коэффициент теплопроводности; $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ - градиент температуры.

Сравнивая формулы (2.56)—(2.60), можно увидеть, что коэффициенты η, v, G, D, λ с формальной математической точки зрения аналогичны. Коэффициент внутреннего трения η численно равен силе трения между двумя слоями с площадью, равной единице. Из формулы (2.57) видно, что коэффициент кинематической вязкости можно трактовать как коэффициент переноса или диффу-

зии количества движения (pv).

С энергетической точки зрения *коэффициент вязкости* есть мера диссипации механической энергии или мера рассеяния в тепло механической энергии движущейся жидкости.

Линейные законы Ньютона и Гука привлекают своей простотой, на основе этих законов решено множество практических инженерных задач в гидродинамике и теории упругости. Поэтому без особой необходимости не следует стремиться использовать различные другие нелинейные реологические законы, усложняющие математически инженерные решения. Очевидно также, что гидродинамика ньютоновских жидкостей и классическая теория упругости имеют глубокую математическую аналогию. Например, формула Буссинеска, полученная решением определенной краевой задачи с дифференциальным уравнением в частных производных с помощью рядов Фурье, справедлива для описания течения ньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале прямоугольного сечения и для описания кручения цилиндрического бруса с постоянным по длине прямоугольным сечением при соответствующей физической трактовке величин, входящих в эту формулу.

К сожалению, многие пищевые среды, являющиеся сложными дисперсными средами из многокомпонентных органических природных полимеров, не подчиняются закону вязкости Ньютона, и их вязкостные свойства нельзя описать одним параметром — коэффициентом вязкости. Эти свойства, исследуемые с помощью вискозиметров и различных реометров, приходится описывать с помощью реологических уравнений и функций типа

$$\tau_{xy} = \mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right). \qquad (2.61)$$

Такие жидкости называются неньютоновскими. Иногда в литературе встречается термин «аномальные», хотя для пищевых дисперсных сред именно ньютоновское поведение более аномальное, чем неньютоновское. Вязкостные свойства неньютоновских жидкостей можно характеризовать условным коэффициентом динамической эффективной вязкости

$$\eta_{эф} = \frac{\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)}. \qquad (2.62)$$

Необходимо отметить, что существует большое количество конструкций реометров, но на многих приборах получают данные в относительных единицах. Относительные единицы вязкости зависят от конструкции прибора, поэтому не являются непосредственно только показателями реологических свойств среды и не всегда могут быть использованы в реодинамических расчетах. Приборы измерения относительной вязкости достаточно широко распространены, они дают важную информацию для контроля протекания технологических процессов и для создания систем автоматического управления процессами.

Некоторые реометры имитируют технологические процессы, и результаты испытаний могут быть использованы в реодинамике при применении теории подобия и размерностей. Для приборноинвариантных реометрических исследований следует рекомендовать в первую очередь капиллярные и ротационные вискозиметры, конические пластометры и некоторые другие реометры, теория которых достаточно хорошо разработана и позволяет получать связи между напряжениями и скоростями сдвига испытываемых материалов в виде таблиц, графиков и эмпирических формул.

Переход от элементарных плоскопараллельных линейных представлений о вязкости на примере одномерной модели вида

$$\tau = \eta\dot{\gamma}, \tag{2.63}$$

требует использования пространственных зависимостей и аппарата тензорного исчисления.

Тогда закон Ньютона можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \left[-p + \left(\chi - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \delta_0 + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{2.64}$$

где σ_{ij} – тензор напряжений; $p = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz}$ – давление, условие изотропности материала; χ – коэффициент объемной вязкости, который при несущественной необратимой сжимаемости среды принимают равным нулю;

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

здесь v_x, v_y, v_z компоненты скоростей точек среды по декартовым осям координат; δ_0 единичный тензор, дельта-символ или символ Кронекера:

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ тензор скоростей деформации.

Многие пищевые массы, содержащие различные полости и способные необратимо деформироваться в условиях всестороннего сжатия, имеют отличный от нуля коэффициент объемной вязкости. В случае несжимаемости материала уравнение (2.64) в компонентах принимает вид системы:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p - \dfrac{2}{3}\eta \cdot \operatorname{div}\vec{v} + 2\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial x}; \\ \sigma_{yy} = -p - \dfrac{2}{3}\eta \cdot \operatorname{div}\vec{v} + 2\eta \dfrac{\partial v_y}{\partial y}; \\ \sigma_{zz} = -p - \dfrac{2}{3}\eta \cdot \operatorname{div}\vec{v} + 2\eta \dfrac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \eta\left(\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} + \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x}\right); \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \eta\left(\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}z} + \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}y}\right); \\ \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \eta\left(\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z}\right); \end{cases} \tag{2.65}$$

В плоском случае течения, когда жидкость течет только вдоль оси x и единственной компонентой напряжения является напряжение сдвига $\sigma_{yx} = \tau_{yx}$, элементарный закон сдвигового вязкого течения приобретает вид

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} = \eta\dot{\gamma}_{yx}. \tag{2.66}$$

Если жидкости не подчиняются рассмотренным линейным соотношениям, а подчиняются, например, закону Оствальда де Вале вида

$$\tau_{yx} = k\dot{\gamma}_{yx}^{n}, \tag{2.67}$$

где k — реологическая константа, коэффициент консистенции; n — реологическая константа, индекс течения,

то жидкости называются неньютоновскими, или аномальными.

Естественно, что закон (2.67) часто называют степенным, а жидкости — соответственно — степенными. Этим законом описывается течение очень многих искусственных полимеров, а также смесей натуральных биологических органических полимеров — пищевых сред.

Весьма аналогичное понятию вязкости в пищевой реологии занимает понятие упругости, как с точки зрения математического описания, так и с точки зрения часто встречающихся аномалий упругости.

Действительно, аналогично обобщенному линейному закону течения Ньютона (2.64) можно записать обобщенный линейный закон упругости Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\mu}\varepsilon_0\delta_0 + 2GD_{\varepsilon}, \tag{2.68}$$

где E, G – модули упругости первого и второго рода (модуль Юнга и модуль сдвига); μ коэффициент Пуассона; ε_0, δ_0 шаровой тензор деформации всесто-

роннего сжатия (расширения), здесь $\varepsilon_0 = \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)/3$ средняя деформация всестороннего сжатия (расширения); D_ε девиатор тензора деформаций, тензор формоизменения или сдвига.

Аналогично обобщенному закону течения Ньютона (2.64) обобщенный закон упругости Гука можно записать в компонентах тензоров:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G\left[\varepsilon_{xx} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)\right]; \\ \sigma_{yy} = 2G\left[\varepsilon_{yy} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)\right]; \\ \sigma_{zz} = 2G\left[\varepsilon_{zz} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)\right]; \\ \tau_{xy} = G\varepsilon_{xy};\ \ \tau_{yz} = G\varepsilon_{yz};\ \ \tau_{zx} = G\varepsilon_{zx}. \end{cases} \tag{2.69}$$

Из обобщенного закона Гука легко получить соответствующий простейший закон Гука при одноосном растяжении. Подставив в первое уравнение системы (2.69) коэффициент Пуассона, согласно его определению,

$$\varepsilon_{yy} = -\mu\varepsilon_{xx};\ \ \varepsilon_{zz} = -\mu\varepsilon_{xx}; \tag{2.70}$$

и использовав связь между коэффициентами упругости и Пуассона вида

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{2.71}$$

получим, опуская индексы,

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{2.72}$$

Линейный закон Гука характеризует абсолютную упругость (эластичность) материала — свойство материала после снятия нагрузки возвращаться в первоначальное недеформированное состояние. Если некоторая часть деформации останется необратимой, то эту часть называют пластической деформацией. Аналогично закону Ньютона, закон Гука во многих случаях деформации пищевых материалов нарушается уже в эластичной области. Одним из первых такого рода аномалию наблюдал Бернулли в 1705 г. Исследовав деформацию лесы из кишки, он получил параболическую зависимость деформации растяжения от нагрузки.

Реология, как любая наука, имеет свои основные понятия, термины и аксиомы, которые до углубления в существо предмета в основном необходимо принять априорно. Инженерная реология пищевых материалов, возникшая на стыке определенного круга теоретических и прикладных дисциплин, использует многие термины общей механики сплошных сред, теории упругости, гидродинамики, сопротивления материалов, гидравлики и ряда других дисциплин. Однако нельзя провести границу между терминологией, заимствованной из других областей науки, и специальной терминологией реологии. Такое разделение возможно лишь условно, и оно не представляется нам практически важ-

ным.

Совокупность понятий и аксиом в инженерной реологии не является строгой понятийной основой для дальнейшего построения с помощью теорем и следствий логического «здания» науки, как это свойственно чисто математическим или очень сильно формализованным наукам. Инженерная реология базируется на эклектической смеси до некоторой степени точных и качественных представлений, необходимых для постановки и анализа практических задач. Это имеет свои достоинства, поскольку предоставляет широкие возможности для дальнейшей формализации, поиска достаточно адекватных точных моделей для описания различных реальных деформационных процессов.

В пищевых отраслях промышленности перерабатывают различные пищевые материалы (массы), которыми являются сырье, полуфабрикаты и конечные продукты, обладающие всем комплексом свойств реальных объектов, в том числе и реологическими свойствами. *Реологическими, или структурно-механическими,* называются механические свойства материалов, проявляющиеся в процессе их деформации, течения и разрушения и часто не укладывающиеся в рамки свойств классических модельных тел Гука, Ньютона или Сен Венана. Строгой грани между реологическими свойствами и свойствами тел Гука, Ньютона и Сен Венана нет. Иногда свойства классических тел тоже относят к реологическим, тогда теория упругости, гидродинамика и теория пластичности, которые соответственно занимаются этими простейшими моделями, автоматически становятся составными частями реологии. В этом случае пограничными столбами реологии (в смысле объектов исследований) являются идеальная невязкая жидкость Паскаля и абсолютно жесткое тело Эвклида.

Теоретическая модель (расчетная схема) пищевого материала, обладающая лишь существенными с точки зрения рассматриваемого процесса обработки реологическими свойствами, а также свойством сплошности для применения математического аппарата анализа бесконечно малых, представляет собой обычную сплошную среду механики континуума.

Деформацию и течение в материалах вызывают нагрузки, воздействия других тел на рассматриваемое, которые схематизируются сосредоточенными силами или давлениями (распределенными силами). В механике сплошных сред силы подразделяют на массовые — действуют на все частицы среды (силы гравитации, инерции и т. п.) и поверхностные — действуют на элементы поверхности тела (силы контактного взаимодействия тел и т. п.). Основные операции с силами так же, как и общие характеристики движения, рассматриваются в теоретической и аналитической механике. Аппарат основных положений, терминов, аксиом и теорем теоретической механики применим и в реологии, за исключением тех положений, которые связаны с некоторыми сильными ограничениями теоретической механики. Например, если в теоретической механике силы можно переносить вдоль линии их действия, а пары — в пространстве, не меняя их ориентации (направления вектора момента пары), то в реологии этого, как правило, делать нельзя, поскольку указанные свойства сил в теоретической механике основаны на гипотезе абсолютно твердого тела, что не имеет места в

реологии.

Понятия о деформации, течении и разрушении в реологии связаны с представлениями о перемещениях и скоростях. Перемещение характеризуется изменением расстояния между системой отсчета и наблюдаемой точкой в эвклидовом пространстве, описываемом количественно вектором перемещения. Перемещения могут являться и функциями времени, тогда возможно введение понятия скоростей, причем время имеет абсолютные свойства, приписываемые ему в ньютоновской механике, пространство же описывается эвклидовой геометрией. В случае деформации и течения не происходит нарушения сплошности тел, если же перемещения сопровождаются нарушениями сплошности тел, то имеют место разрушения. При деформациях исследуются обычно два или несколько дискретных состояний изменения формы сплошного тела, при течении — непрерывное во времени изменение конфигурации среды.

Возможны более простые случаи, когда ряд компонентов этих тензоров равны нулю. В связях между тензорами напряжений и скоростей деформаций проявляются механические свойства материалов. Эти связи в реальных телах исследуются экспериментально.

Материалы, реологические свойства которых во времени существенно не меняются независимо от длительности процессов деформации и течения, называются *реологически стационарными;* остальные материалы — реологически нестационарными. Причины нестационарности реологических свойств материалов могут быть различными, в том числе чисто механическими, связанными с разрушением структуры материала в процессе течения. Свойство тела, при котором отношение касательного напряжения к скорости сдвига временно уменьшается в результате предшествующей деформации, называется *тиксотропией.* Сравнительно редко тела проявляют антитиксотропические, или *реопектические свойства,* когда проявляется «затруднение» сдвига при постоянной скорости деформации, структурная прочность вещества возрастает (рис. 2.5).

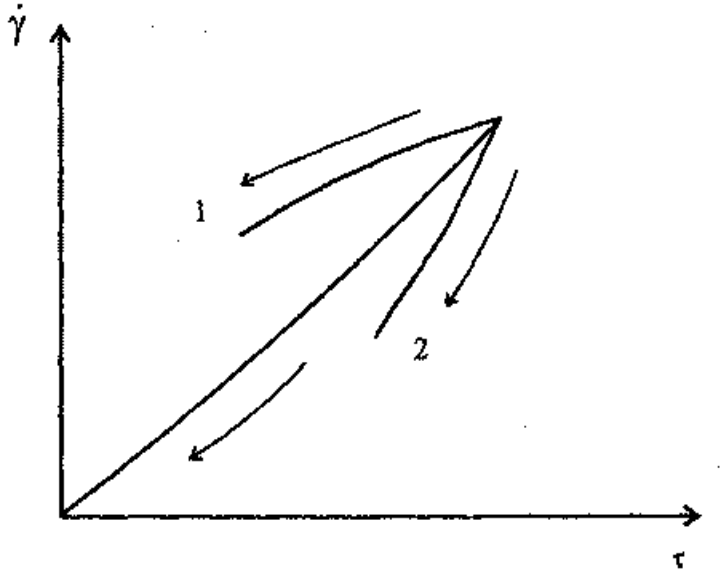


Рис. 2.5 – Тиксотропия (1) и реопексия (антитиксотропия) (2)

Можно утверждать, что реальные материалы обладают всеми реологическими свойствами, но в конкретных условиях проявляют их в зависимости от конкретных условий механической переработки в различной степени. Эксперименты Сфивта (1947 г.) показали, что при пластическом кручении стальных и медных стержней они удлиняются, что не может быть описано обобщенным законом Гука (2.68). Этот же эффект наблюдался Пойнтингом и Ривлин Остановимся на мерах деформации. Обычно под этим понимается мера деформации в смысле Коши. Пусть прямоугольная призма до деформации имеет длину l_{0i}, l_{0j}, l_{0k} после деформации l_i, l_j, l_k . Тогда меру деформации по Коши можно выразить так:

$$\varepsilon_i = \frac{l_i - l_{0i}}{l_{0i}} = \frac{l_i}{l_{0i}} - 1 = \lambda_i - 1. \tag{2.73}$$

Эту меру можно использовать также для конечной деформации:

$$\varepsilon_i^C = \varepsilon_i = \lambda_i - 1. \tag{2.74}$$

Для конечной деформации можно использовать любую функцию λ_i, которая удовлетворяла бы следующим требованиям:

1. Если нет изменений формы и объема, то $\varepsilon_i = 0$, $l_i = 1$, $l_i = l_{0i}$,
2. Деформация сводится к мере Коши, когда $l_i / l_{0i} - 1$ бесконечно малая.
3. ε_i безразмерная величина.

Данным требованиям удовлетворяют также следующие меры деформации Генки, Альманси, Свейнгера и Грина:

$$\varepsilon_i^H = \ln\left[1 + (\lambda_i - 1)\right]; \tag{2.75}$$

$$\varepsilon_i^A = \frac{1 - \left(1/\lambda_i^2\right)}{2}; \tag{2.76}$$

$$\varepsilon_i^S = 1 - \frac{1}{\lambda_i}; \tag{2.77}$$

$$\varepsilon_i^G = \frac{\lambda_i^2 - 1}{2}. \tag{2.78}$$

Рассмотрим кручение цилиндрического бруса круглого поперечного сечения радиуса R и длины L при угле закручивания Ω. Если длину бруса принудительно оставить постоянной, то эффект Пойнтинга проявится в том, что на торцах цилиндра появится давление (нормальные напряжения). Для конечного закручивания, например, используем меру деформации Альманси

$$\varepsilon_{rs}^A = \frac{r\Omega}{2L} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{r\Omega}{L} \end{vmatrix}. \tag{2.79}$$

Запишем обычное уравнение обобщенного закона Гука:

$$p_{rs} = \chi \varepsilon_v \delta_{rs} + 2G\varepsilon_{rs}. \tag{2.80}$$

Для конечных упругих деформаций перепишем это уравнение в виде

$$p_{rs} = \lambda_L \varepsilon_v \delta_{rs} + 2G\varepsilon_{rs} = F_0 \delta_{rs} + 2G\varepsilon_{rs}. \tag{2.81}$$

Пренебрегая массовыми силами, получим

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{zr}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{\theta\theta}}{r} - \rho\alpha_r = 0, \tag{2.82}$$

Из уравнения напряжений в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial F_0}{\partial r} - \frac{2G\varepsilon_{\theta\theta}}{r} = 0. \tag{2.83}$$

Интегрируя и определяя деформацию по Альманси, получим условие

$$p_{rr}^A = F_0 = \text{const}.$$

Если предположить, что боковые поверхности $r = R$ свободны от этих напряжений, то $F_0^A = 0$ и распределение напряжений вдоль оси z по Альманси выражает формула вида

$$p_{zz}^A = -\frac{Gr^2\Omega^2}{L^2}. \tag{2.84}$$

$$p_{rs} = \lambda_L \varepsilon_v \delta_{rs} + 2G\varepsilon_{rs} + 4G_c \sum_{\alpha} \varepsilon_{r\alpha}\varepsilon_{\alpha s}, \tag{2.85}$$

где p_{rs} -тензор напряжений; λ_L - модуль упругости Ляме; ε_v - объемная конечная деформация; δ_{rs} - символ Кронекера; G - модуль сдвига, или модуль жесткости; ε_{rs}, $\varepsilon_{r\alpha}$, $\varepsilon_{\alpha s}$ - тензоры конечных деформаций; G_c - модуль поперечной упругости.

$$p_{xx} = \lambda_L \varepsilon_v + 2G\varepsilon_{xx} + 4G_c\left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2\right); \tag{2.86}$$

$$p_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} + 4G_c\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}\right); \tag{2.87}$$

Обобщенный закон упругости Рейнера с вводом модуля поперечной упругости может объяснить некоторые экспериментальные реологические эффекты типа эффекта Пойнтинга, когда при кручении бруса из некоторых материалов он не удлиняется, а укорачивается. Поскольку эффект Пойнтинга наблюдался в экспериментах Ривлин для таких материалов органического происхождения, как резина, то это явление целесообразно иметь в виду при переработке органических пищевых материалов.

Если определить тензор скоростей деформации по Рейнеру в виде

$$f_{rs} = \frac{\partial v_r / \partial x_s + \partial v_s / \partial x_r}{2}, \tag{2.88}$$

то, аналогично обобщенному закону (2.85) для упругих деформаций, обобщенный закон для вязкого течения имеет вид

$$p_{rs} = F_0 \delta_{rs} + 2\eta f_{rs} + 4\eta_c \sum_{\alpha} f_{r\alpha} f_{\alpha s}, \tag{2.89}$$

где η_c — коэффициент поперечной вязкости.

В случае вращательного движения жидкости с угловой скоростью Ω между двумя параллельными пластинами с зазором H можно получить выражения для напряжений:

$$p_{rr} = -\frac{\Omega^2\left(R^2 - r^2\right)\eta_c}{2H}; \tag{2.90}$$

$$p_{zz} = -\frac{\Omega^2\left(R^2 - 3r^2\right)\eta_c}{2H}. \tag{2.91}$$

Если в середине верхней пластины имеется отверстие с вертикальной трубкой, то жидкость под действием этих напряжений будет перемещаться к центру диска и подниматься по трубке вверх в полном противоречии с центробежными силами и силами тяжести. Множество подобных эффектов наблюдается в практике переработки пищевых материалов. Например, сгущенное молоко начинает подниматься по вращающемуся в нем стержню наверх. Этот эффект называется эффектом Вейссенберга, его следует учитывать при проектировании пищевых машин.

Особые реологические проблемы расчета пищевых машин возникают, когда связь между напряжениями сдвига и деформациями сдвига нелинейная (неньютоновские жидкости) и когда пищевая среда одновременно при деформациях и течении проявляет свойства жидкостей и твердых деформируемых тел (свойства вязкоупругости и вязкопластичноупругости).

2.7 Вязкоупругость

Гуковское линейно-упругое твердое тело и ньютоновская линейно-вязкая жидкость в некотором смысле представляют собой две крайние модели линейных тел. Между тем многие пищевые среды в деформационных процессах проявляют одновременно упругие и вязкостные свойства. Такие пищевые среды называются вязкоупругими. Для них можно построить ряд промежуточных моделей.

Одной из простейших вязкоупругих моделей является механическая модель тела или жидкости Максвелла, которая представляет собой последовательное соединение тел Гука и Ньютона. Символьная формула модели имеет вид *M—N—H.*

Математическая модель Максвелла строится в предположении, что деформация (пусть для определенности это будет деформация простого сдвига) в некоторой точке среды представляет собой сумму упругой деформации и деформации течения, инерционными эффектами можно пренебречь:

$$\gamma = \gamma_H + \gamma_N, \tag{2.92}$$

где γ - общая деформация сдвига; $\gamma_н$ -упругая деформация тела Гука; γ_N - деформация течения тела Ньютона.

Из реологических уравнений тел Гука и Ньютона запишем

$$\dot{\gamma}_N = \frac{\tau}{\eta};\ \gamma_H = \frac{\tau}{G};\ \dot{\gamma}_H = \frac{\dot{\tau}}{G}, \tag{2.93}$$

где η - коэффициент динамической вязкости; G - модуль сдвига (модуль упругости второго рода).

Продифференцируем уравнение (2.92) по времени и подставим выражения (2.93):

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_N + \dot{\gamma}_H;$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta};$$

$$\tau = \dot{\eta}\gamma - \left(\frac{\eta}{G}\right)\dot{\tau} \tag{2.94}$$

Последнее уравнение (2.94) называется реологическим уравнением тела Максвелла. С помощью этого уравнения, например, можно проанализировать процесс релаксации напряжений в среде при постоянной деформации: γ = const; γ = 0.

$$\dot{\tau} + \left(\frac{G}{\eta}\right)\tau = 0. \tag{2.95}$$

Решение дифференциального уравнения (1.95) имеет следующий вид:

$$\tau = e^{\lambda t};\ \dot{\tau} = \lambda e^{\lambda t};\ \lambda e^{\lambda t} + \left(\frac{G}{\eta}\right)\lambda e^{\lambda t} = 0;\ e^{\lambda t} \neq 0;$$

$$\lambda = -\frac{G}{\eta}, \tag{2.96}$$

Откуда

$$\tau = Ce^{-\frac{G}{\eta}t}. \tag{2.97}$$

Константу интегрирования C находим из условия, что в начальный момент времени известно начальное напряжение:

$$t = 0;\ \tau = \tau_0;\ C = \tau_0. \tag{2.98}$$

Тогда процесс релаксации напряжений при постоянной деформации описывается уравнением

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{G}{\eta}t}. \tag{2.99}$$

С течением времени в теле Максвелла при постоянной деформации напряжение экспоненциально стремится к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} t = \lim_{t\to\infty} t_0 e^{-\frac{G}{\eta}t} = 0. \tag{2.100}$$

Заметим также, что отношение динамической вязкости к модулю упругости имеет размер времени. Тогда

$$t_1 = \frac{\eta}{G}; \qquad \frac{\tau_1}{\tau_0} = e^{-\frac{G}{\eta}t_1} = e^{-1} \approx 0{,}37, \tag{2.101}$$

$$\tau_1 = 0{,}37\tau_0. \tag{2.102}$$

За время t_1 начальное напряжение уменьшается на 37 %.

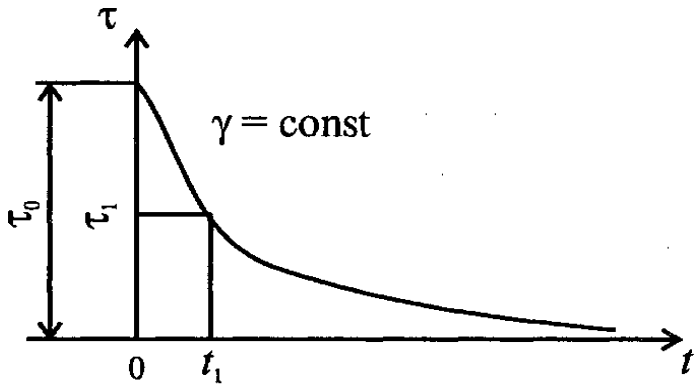


Рис. 2.6 – Кривая релаксации напряжений

С позиции наглядной механической модели эта математическая модель представляет собой последовательное соединение пружины (тело Гука) и демпфера (жидкость Ньютона). Если соединить пружину и демпфер параллельно, то получим наглядную модель тела Кельвина-Фойгта. Реологическое уравнение тела Кельвина-Фойгта получим в предположении, что в некоторой точке среды общее напряжение состоит из суммы напряжения за счет упругости среды и напряжения за счет вязкости жидкости:

$$\tau = \tau_N + \tau_H; \tag{2.103}$$

$$\tau = \eta\dot{\gamma} + G\gamma. \tag{2.104}$$

Уравнение (2.104) является реологическим уравнением Кельвина-Фойгта, с помощью которого можно изучить процесс ползучести дисперсной среды при постоянных напряжениях.

Для анализа процесса ползучести перепишем дифференциальное уравнение вязкоупругой среды Кельвина-Фойгта в следующем виде:

$$\tau_0 = \eta\frac{d\gamma}{dt} - G\gamma. \tag{2.105}$$

где $\tau = \tau_0 = \text{const}$ - начальное приложенное напряжение к телу.

В отличие от рассмотрения процесса релаксации напряжений здесь используем прием непосредственного разделения и замены переменных:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\left(\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma\right)}, \tag{2.106}$$

заменим переменные:

$$z = \frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma, \tag{2.107}$$

$$\mathrm{d}\gamma = -\frac{\eta}{G} \cdot \mathrm{d}z. \tag{2.108}$$

Новое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\mathrm{d}t = -\frac{\eta}{G}\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{2.109}$$

Его решение имеет вид

$$t = -\frac{\eta}{G}\ln z + C; \tag{2.110}$$

$$t = -\frac{\eta}{G}\left[\ln\left(\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma\right)\right] + C. \tag{2.111}$$

Константу интегрирования находим из начальных условий: $t = 0$, $\gamma = 0$. Тогда получим выражение

$$t = -\frac{\eta}{G}\left[\ln\left(\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{G}{\eta}\gamma\right)\right] + \frac{\eta}{G}\ln\frac{\tau_0}{\eta}. \tag{2.112}$$

Используя свойства логарифмов, потенцируем правую часть полученного уравнения и получим выражение

$$\ln\frac{\tau_0 - G\gamma}{\tau_0} = -\frac{G}{\eta}t. \tag{2.113}$$

$$\frac{\tau_0 - G\gamma}{\tau_0} = e^{-\frac{G}{\eta}t}; \tag{2.114}$$

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right). \tag{2.115}$$

Очевидно при $t = 0$:

$$e^{-\frac{G}{\eta}t} = 1;\ \gamma = 0, \tag{2.116}$$

при $t = \infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\gamma = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\tau_0}{G}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{G}{\eta}t}\right)\right] = \frac{\tau_0}{G}. \tag{2.117}$$

Формула (2.115) и выражения (2.116) и (2.117) позволяют построить график процесса ползучести (рис. 2.7).

Следует отметить, что в реологии вязкоупругость очень часто моделируется с помощью дифференциальных уравнений, составляемых на базе символьных формул и наглядных механических моделей, многие из которых имеют общепринятые названия по фамилиям авторов: модели Максвелла, Кельвина-Фойгта, Пойнтинга-Томсона, Шофильда-Скотт-Блэра и др. Однако период развития реологии, когда изобретали все новые, более сложные механические модели, прошел, так же как и период изобретения математических моделей неньютоновских жидкостей. Современный математический аппарат предлагает для решения проблем деформаций и течения общие подходы, а вычислительные трудности стали легко преодолимыми с распространением мощных персональных компьютеров. Тем не менее, механические модели полезны в силу своей наглядности и качественной сопоставимости с решениями многих проблем вязкоупругости с помощью дифференциальных уравнений, как было показано на примере модели Максвелла.

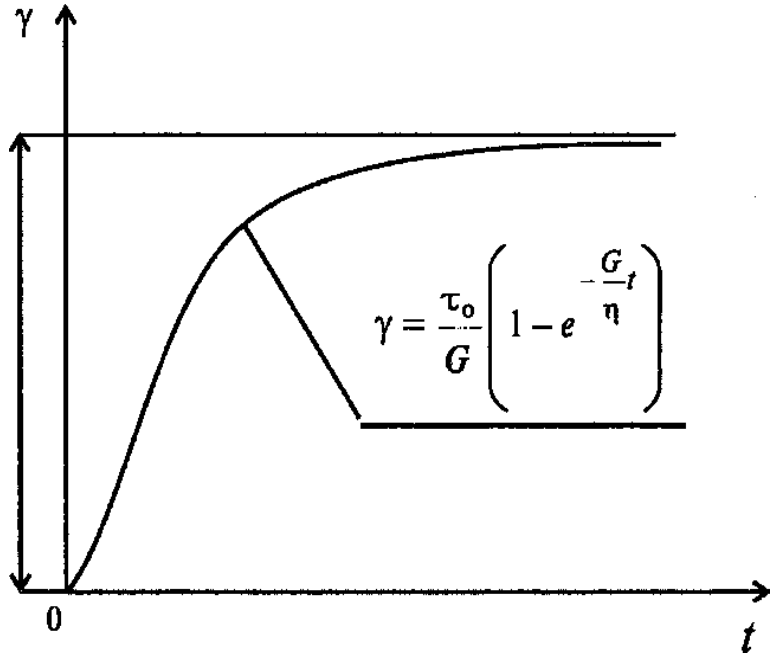


Рис. 2.7 – График процесса ползучести
по модели Кельвина-Фойгта

Распространенность такого механического и математического моделирования демонстрирует работа Ю. В. Маковецкого, Ю. Н. Смолина и Г. А. Чуича, которые исследовали механические свойства печени методом деформации сжатием. Была использована модель Куна, состоящая из двух вязкоупругих элементов Максвелла, соединенных параллельно:

$$\sigma = \sigma_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] + \sigma_2 \exp\left[-\frac{t}{\tau_2}\right];$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \qquad (2.118)$$

$$E = E_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] + E_2 \exp\left[-\frac{t}{\tau_2}\right]$$

где σ – общее напряжение в системе; σ_1, σ_2 – напряжения, полученные экстраполяцией к нулевому времени двух условно прямолинейных участков полулогарифмических графиков lnσ – *t*; *t* – время релаксации; *E* и E_1 E_2 – общий и релаксационные модули упругости.

Однако в диапазоне относительных деформаций 0,29-0,73 модель не работает. Были получены эмпирические нелинейные зависимости для модулей упругости и вязкости первого демпфера:

$$E_1 = A_1[\exp(\varepsilon q_1)];$$
$$E_2 = A_2[\exp(\varepsilon q_2)]; \qquad (2.119)$$
$$\eta = B_1[\exp(\varepsilon k)];$$

$$A_1 = 1990;\ A_2 = 2300;\ B_1 = 9;\ q_1 = 7;\ q_2 = 5{,}2;\ k = 14;$$

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1};\ \tau_1 = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)\left(\frac{\exp(\varepsilon k)}{\exp(\varepsilon q_1)}\right); \qquad (2.120)$$

время релаксации τ_0, почти не зависит от деформации и равно 22,6 с;

$$E = A_1 \exp\left[\varepsilon q_1 - \left(\frac{t}{\tau_1}\right)\right] + A_2 \exp\left[\varepsilon q_2 - \left(\frac{t}{\tau_1}\right)\right]. \qquad (2.121)$$

Символьная формализация достаточно удобна для составления этих дифференциальных уравнений, поэтому полезно будет рассмотреть механическое и символьное моделирование вязкоупругих свойств типовых материалов немного подробнее.

2.8 Реологические уравнения сдвигового течения

Приведенные выше математические модели Максвелла, Кельвина-Фойгта, Пойнтинга-Томсона, Шофильда-Скотт-Блэра и других исследователей подтверждают всю сложность формализации процессов течения сложных по составу сред, к которым в первую очередь относятся пищевые продукты, сырьё и полуфабрикаты.

Длительное время в теории и практике реологии широко использовалось уравнение Шведова-Бингама:

$$\Theta = \Theta_0 + \eta\dot{\gamma} \qquad (2.122)$$

Было принято считать, что оно является универсальным для широкого класса реальных вязкопластичных систем. В результате развития инструментальной реологии (реометрии) обнаружилось, что в области низких скоростей деформации кривая течения реальных сред уклоняется от прямой линии. Другими словами, выяснилась несостоятельность модели Шведова—Бингама. Более того, было показано, что если эффекты, связанные с нелинейностью кривой течения в области низких скоростей деформации, не принимать во внимание, то, например, при расчете расхода жидкости при ее течении через трубы можно получить величины, почти на порядок отличающиеся от действительных. Это

послужило импульсом для появления вначале различных модификаций модели Шведова— Бингама, а затем и достаточно пестрого набора других оригинальных моделей. Приведем лишь наиболее популярные:

Модель Гершеля-Балкли получена путем добавления к пределу текучести степенного закона, описывающего поведение псевдопластических и дилатантных жидкостей:

$$\Theta = \Theta_0 + B_1\dot{\gamma}^n \qquad (2.123)$$

где θ – напряжение сдвига между слоями продукта, Па; θ_0 – предельное напряжение сдвига, Па; B_1– коэффициент консистентности, пропорциональный вязкости, Па c^{-n}; n – индекс течения.

Таблица 2.1

Значения параметров в уравнении Гершеля–Балкли

Название тела	Индекс течения	Вязкость	Предельное напряжение сдвига
1	2	3	4
Упругое	Бесконечность	Бесконечность	Нуль
Пластичное	Нуль	Больше нуля	Больше нуля
Пластично–вязкое	Единица	Больше нуля	Больше нуля
Псевдопластичное	Меньше единицы	Больше нуля	Нуль
Дилатентное	Нуль	Больше единицы	Больше нуля
Нелинейное пластичное	Больше единицы	Больше нуля	Больше нуля
Нелинейное дилатентное	Больше нуля	Больше единицы	Больше нуля
Истинно–вязкое	Нуль	Единица	Больше нуля
Идеальная жидкость	Нуль	Нуль	Нуль

Следует акцентировать внимание на входящие в уравнение величины: *Предельное напряжение сдвига* – это такое напряжение, при котором в материале, проявляющем упругие свойства, начинаются сдвиговые деформации (пластическое течение). Показатель степени при скорости сдвига, называемый *индексом течения* характеризует отклонение течения материала от течения ньютоновской жидкости.

Для уравнения Гершеля–Балкли составлена таблица (табл. 2.1) параметров входящих в него величин, согласно которой уравнение может быть применено к описанию девяти реологических тел.

Несмотря на обилие моделей, ни одна из них не является универсальной для всего спектра скоростей деформации. Наибольшего интереса заслуживает модель Шульмана, которая характерна тем, что из нее выводится ряд других реологических законов. Например, при n = 1 она превращается в модель Шведова, а при n = 2 — в модель Кессона. Однако и модель Шульмана, по мнению самого же автора, не всегда позволяет использовать ее для аппроксимации всей

кривой течения реальной жидкости. В 1976 году З.П. Шульманом предложена более обобщенная реологическая модель:

$$\Theta = \left(\Theta_0^{1/n} + \left(\eta_r \cdot \dot{\gamma}\right)^{1/m}\right)^n \qquad (2.124)$$

где n и m — индексы течения.

Эта модель предполагает нелинейность пластичности и вязкости. Она в сущности включает в себя большинство имеющихся реологических уравнений.

Подводя итог, можно сказать, что, во-первых, существует целый класс сред или реологических систем, которые могут быть охарактеризованы как неньютоновские текучие системы (неньютоновские жидкости). Их отличительной чертой является наличие переменной вязкости. Во-вторых, переменная вязкость может быть обусловлена либо нелинейной зависимостью между текучестью и градиентом скорости, либо, наоборот, наличием предела текучести, либо тем и другим вместе. В-третьих, для описания такого рода текучих систем существует несколько реологических уравнений. Наиболее обобщающим из них является уравнение Шульмана (2.124).

Очевидно, что в зависимости от особенностей конкретной нелинейно-вязкопластичной среды индексы n и m должны подбираться индивидуально — применительно к каждому материалу. Чем более строго они будут определены, тем точнее можно будет отразить реологические особенности той или иной жидкости.

2.9 Феноменологические модели реологических свойств

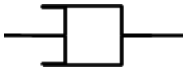
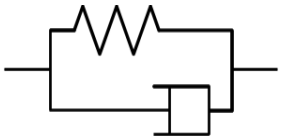
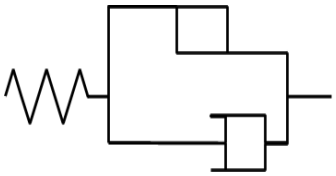
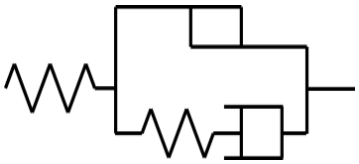
Подход, когда не рассматриваются физические и другие причины проявления вязкости пищевых сред (допустим, на молекулярном уровне), являющиеся предметом микрореологии, а просто констатируется факт существования вязкости и устанавливается, например, связь между напряжениями и скоростями сдвига, называется *феноменологическим*, что является предметом макрореологии.

В силу сложности состава пищевых сред в настоящее время достоверные данные о вязкости материалов для построения математических реодинамических моделей процессов переработки получали путем экспериментальных реометрических исследований. Экспериментальные исследования привели к формированию классических реологических тел, которые формировались постепенно на протяжении длительного времени.

С некоторого времени в практику вошел обычай описывать реологические свойства тел математической зависимостью и одновременно давать некий стилизованный символ этого свойства – модель. Этот метод позволяет сильно упростить наши представления о сложных свойствах материалов и значительно упрощает понимание математических моделей и кривых течения. В таблице 2.2 представлены некоторые феноменологические модели свойств материалов.

Таблица 2.2

Феноменологические модели реологических свойств

№ п/п	Наименование	Механическая модель	Математическая модель
1	2	3	4
Основные одноэлементные модели			
1	Модель Гука		$\sigma = E \cdot \varepsilon$
2	Модель Ньютона		$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$
3	Модель Сен-Венана		$\varepsilon = 0; \sigma \le \sigma_0;$ $\dot{\varepsilon} > 0; \sigma \le \sigma_0$
Основные упруговязкие модели			
4	Модель Максвелла		$\sigma + r \cdot \dot{\sigma} = k \cdot \dot{\varepsilon}$
5	Модель Фойгта-Кельвина		$\sigma = H \cdot \varepsilon + k \cdot \dot{\varepsilon}$
Основные упруговязкопластичные модели			
6	Модель Бингама		$\sigma < \sigma_0,$ $\sigma = E \cdot \varepsilon; \sigma \ge \sigma_0,$ $\sigma + n \cdot \dot{\sigma} = k \cdot \dot{\varepsilon}$
7	Модель Шведова		$\sigma < \sigma_0,$ $\sigma = E \cdot \varepsilon; \sigma \ge \sigma_0,$ $\sigma + n \cdot \dot{\sigma} = k \cdot \dot{\varepsilon}$

Контрольные вопросы

1. Приведите два определения реологии.
2. Какие части составляют инженерную реологию пищевых производств?
3. Что такое деформация?
4. Какие бывают деформации?
5. Какие параметры задают при эйлеровом описании движения?
6. В чем отличие лагранжевого подхода?
7. В чем отличие реодинамики от гидродинамики?
8. Сформулируйте закон сохранения вещества математически.
9. Как формулируется закон количества движения?
10. Как записывается второй закон Ньютона в интегрально–дифференциальной форме?
11. Приведите уравнение неразрывности для пищевой среды.
12. Приведите уравнение движения в векторном виде.
13. Как связан тепловой поток с градиентом температуры в изотропной среде?
14. Дайте анализ элементарного тетраэдра, произвольно ориентированного в пространстве в прямоугольной системе координат для выражения поверхностной силы вязкого сопротивления, приходящейся на единицу некоторой площадки.
15. Выразите тензор градиентов скоростей и тензор градиентов смещений.
16. Как могут накладываться сдвиги?
17. Дайте определение вязкости.
18. Раскройте понятие течения в реологии.
19. Дайте определение коэффициента динамической вязкости.
20. Сформулируйте линейный закон вязкого течения Ньютона для жидкостей.
21. Дайте анализ коэффициента вязкости с энергетической точки зрения.
22. Какой функцией описывается неньютоновская жидкость?
23. Дайте выражение условного коэффициента динамической эффективной вязкости в общем виде.
24. Сформулируйте закон Оствальда де Вале. Какие жидкости в реологии называются степенными?
25. Сформулируйте обобщенный линейный закон упругости Гука.
26. Какова связь между коэффициентами упругости и Пуассона?
27. Какие свойства материалов называются реологическими, или структурно-механическими?
28. Какие материалы называются реологически стационарными, какие нестационарными?
29. Дайте определение тиксотропии и реопексии.
30. Объясните эффект Пойнтинга.
31. Какие пищевые среды называются вязкоупругими?

32. Дайте характеристику механической модели тела или жидкости Максвелла.
33. Запишите и поясните реологическое уравнение тела Максвелла.
34. Каким уравнением описывается процесс релаксации напряжений при постоянной деформации?
35. Нарисуйте и поясните кривую релаксации напряжений.
36. Запишите и поясните реологическое уравнение Кельвина-Фойгта.
37. Нарисуйте и поясните кривую график процесса ползучести по модели Кельвина-Фойгта.
38. Запишите и поясните модель Гершеля-Балкли.
39. Дайте определение предельному напряжению сдвига.
40. Что характеризует индекс течения в модели Гершеля-Балкли?
41. В чем отличие модели Шульмана от модели Гершеля-Балкли?
42. Поясните сущность феноменологического подхода в реологии.
43. Какими стилизованными символами реологических свойств пользуются при составлении механических моделей реологических тел?
44. Нарисуйте и поясните основные упруговязкие модели.
45. Нарисуйте и поясните основные упруговязкопластичные модели.

Глава 3 ОСНОВЫ РЕОМЕТРИИ. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

3.1 Классификация методов и приборов для определения реологических свойств материалов

Для экспериментального определения реологических параметров продуктов или текстурных показателей консистенции существует множество методов, которые различаются по области применения (лабораторные и производственные), виду измеряемой величины (например, реологические характеристики продукта и показатели его консистенции), принципам нагружения, степени автоматизации и др.

Для практического выбора метода измерения учитывают необходимое количество проб, точность и продолжительность измерений и другие факторы, которые зависят от конкретных конструктивных решений измерительного прибора.

Большое число реологических методов измерений предназначено для лабораторных исследований. Кроме лабораторных методов измерений для фундаментальных научных исследований реологических характеристик материалов (в том числе и специальных) с высокой точностью, для многократно повторяющихся исследований предпочтение отдается тем методам и приборам, которые позволяют провести измерения и обработку их результатов быстро и с минимальной зависимостью от субъективных факторов. Промышленностью ряда зарубежных стран выпускаются такие приборы, измерения на которых полностью автоматизированы с помощью компьютера, одновременно математически обрабатывающего исходные данные измерений в соответствии с выбранными моделями и уравнениями деформации и течения исследуемых продуктов, а так же комплексные реологические лаборатории под названием «автоматизированное рабочее место реолога».

Эффективное и качественное управление процессами производства пищевых продуктов часто требует контроля реологических показателей в производственных условиях. Использование лабораторных методов при этом сопряжено с большими затратами времени и труда и возможно только для очень длительных процессов. Методы измерений в производственном процессе требуют использования большей частью несложных принципов одномерного нагружения продукта (простой сдвиг, одноосное растяжение – сжатие и т.д.), охватывающих измерение конкретных показателей консистенции или характерных величин, которые связаны с выбранными реологическими свойствами.

Одномерное стационарное сдвиговое течение может быть реализовано при капиллярном, плоскопараллельном, цилиндрическом и торсионном течении. Измерение одномерного сдвига лежит в основе принципа действия стандартных реометров (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Реометры одномерного сдвигового течения

Реометр	Вид течения	Область применения, требования к количеству исследуемого материала
1	2	3
Капиллярные вискозиметры:		
постоянного давления	Капиллярное	Для ньютоновских жидкостей при малых градиентах сдвига: малое количество материала
переменного давления		Для неньютоновских жидкостей в технологических процессах; большое количество материала
высокого давления		Для высоковязких и пластичных сред, а также при высоких градиентах сдвига
Вискозиметр с каналом в виде щели широкой или кольцевой	Между паралельными плоскостями	Для неньютоновских жидкостей в технологических процессах; большое количество материала
Ротационные вискозимеры		
с сооснымиц илиндрами	Цилиндрическое Куэтта	Для ньютоновских и неньютоновских жидкостей в качестве лабораторных приборов; малое количество материала
с параллельными плоскостями:	Торсионное	Для неньютоновских жидкостей в технологических процессах; большое количество материала
типа конус–плоскость	Торсионное между конусом и пластиной	Для ньютоновских и неньютоновских жидкостей при постоянном градиенте сдвига в измерительном зазоре; очень малое количество материала
типа сфера–сфера	Торсионное между шаром и сферической оболочкой	Для ньютоновских и неньютоновских жидкостей при постоянном градиенте сдвига в измерительном зазоре; очень малое количество материала

Известны реометры, принцип измерения которых основан на течении Стокса вокруг падающих шариков (табл. 3.2). Расчет скорости сдвига для падающих шариков в узкой трубе чрезвычайно сложен, поэтому константы прибора определяют посредством калибровки с помощью жидкости с известной вязкостью.

Таблица 3.2

Реометры течения Стокса

Реометр	Вид течения	Область применения
1	2	3
Вискозиметр с падающим шариком и широкой трубкой (диаметр шарика во много раз меньше диаметра трубки)	По закону Стокса вокруг шарика	Для прозрачных ньютоновских жидкостей с использованием различных шариков; для неньютоновских жидкостей применение ограничено
Вискозиметр с падающим шариком и узкой трубкой	По модифицированному закону Стокса около шарика в кольцевом зазоре	Для прозрачных и полупрозрачных ньютоновских жидкостей; для лабораторных приборов
Вискозиметр с толкаемым шариком и узкой трубкой	То же	Для ньютоновских и неньютоновских жидкостей; для лабораторных приборов

Для количественного определения вязкоупругих характеристик используют реометры, основанные на одномерном осциллирующем сдвиговом течении (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Реометры одномерного осциллирующего сдвигового течения

Тип колебания	Рабочие органы реометра	Область применения
1	2	3
Вынужденные вращательные с малой амплитудой и переменной частотой	Плоскость – плоскость, конус – плоскость, коаксиальные цилиндры	Для количественного определения динамических модулей и постоянных времени вязкоупругих жидкостей
Свободные вращательные с начальными условиями	Плоскость – плоскость, конус – плоскость, коаксиальные цилиндры	Для определения реологических характеристик вязкоупругих жидкостей
Вынужденные за счет эксцентриситета оси вращения	Плоскость – плоскость, эксцентричные цилиндры	Для определения динамических модулей и констант времени вязкоупругих жидкостей

Продолжение табл. 3.3

1	2	3
Вынужденные из–за относительного отклонения оси вращения	Полусфера – полусферическая оболочка, конус – плоскость, цилиндр – цилиндр	То же

Для исследования сложных неньютоновских жидкостей применяют методы (табл. 3.4.), которые дают быстрые, воспроизводимые результаты измерений. Такие методы приобретают особое значение при исследовании продуктов или полуфабрикатов, реологические свойства которых быстро изменяются вследствие ферментативных, химических или физических процессов.

Таблица 3.4

Методы определения консистенции и реологических характеристик материалов на основе комплексного нагружения (по М. Боурну)

Принцип нагружения	Измеряемая величина	Область применения
1	2	3
Внедрение индентора определенной формы и размеров при заданном усилии и времени внедрения; типичные формы инденторов – конус, шар, полусфера, цилиндрический штифт, игла	Глубина внедрения по истечении определенного времени, глубина внедрения в равновесном состоянии, кинетика внедрения в течение всего времени измерений	Для пластичных и упруго–пластичных материалов – творог, творожные изделия, сыры, сливочное масло и т.д. в статическом состоянии
Перемешивание жидкостей при определенных траекториях движения, геометрии сосуда, количестве и температуре материала и определенной частоте вращения	Крутящий момент	Для жидких и вязких суспензий, эмульсий, пенообразных масс с малым пределом текучести или при его отсутствии – творожный и сырный сгустки, йогурт, кефир, ряженка, сметана и т. д.
Перемешивание масс в месильном устройстве при определенных геометрии месильной камеры, количестве и температуре материала, частоте вращения	Крутящий момент	Для вязких и вязкопластичных масс (мороженого, глазури, творожных изделий и т.д.); для контроля процессов их структурообразования и исследования изменений в структуре смеси при

Продолжение табл. 3.4

1	2	3
		ее обработке, а также введении добавок для достижения определенной консистенции продуктов
Экструдирование пластичных масс через узкие отверстия определенной геометрии при постоянной скорости экструдирования и температуре	Давление при определенной скорости экструдирования; количество экструдируемого материала	Для пластичных и упругопластичных масс в динамическом состоянии – глазированных сырков и колбасного сыра в процессе формования
Вибрационное нагружение с определенной амплитудой и частотой	Затухание колебаний, резонансная частота	Для вязких растворов или суспензий с частицами грубодисперсных компонентов – джемов, конфитюров, йогуртов и молочных десертов с фруктовыми наполнителями
Деформация вязкой или вязкоупругой массы определенного количества и формы при пост. температуре под действием силы тяжести	Уменьшение высоты, увеличение площади	Для малого количества вязких и вязкоупругих масс – творожных кремов, сливочного сыра, мягкого мороженого

Укрупненная классификация применяемых приборов, предназначенных для исследования описанных выше структурно–механических свойств и текстуры исходного сырья, полуфабрикатов и готовых продуктов, предложенная А. В. Горбатовым и Ю. А. Мачихиным и переработанная с учетом специфики их выбора для определения основных реологических показателей выпускаемой в молочной отрасли промышленности продукции, представлена в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Реометры, используемые для исследования молочных продуктов

Реометры	Вид нагружения, течения	Измеряемая величина
1	2	3
Вискозиметры		
Капиллярные	Одномерное сдвиговое течение	Коэффициенты динамической эффективной и пластической вязкости, индекс течения, а также параметры текстуры
Ротационные	То же	
Шариковые	Течение Стокса	

1	2	3
Колебательные	Одномерное и двухмерное сдвиговое течение	
Пенетрометры	Многомерное пенетрационное течение	Предельное напряжение сдвига, параметры текстуры
Компрессионные приборы	Сжатие образца	Предел прочности при сжатии, объемная вязкость, модули упругости, периоды релаксации, параметры текстуры
Универсальные приборы типа «Инстрон»	Растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг и другие простейшие виды нагружения исследуемого продукта	Прочностные характеристики, параметры текстуры
Трибометры	Сдвиг	Фрикционные характеристики
Адгезиометры	Отрыв контактирующего элемента от поверхности исследуемого материала	Адгезионные характеристики

3.2 Определение структурно–механических характеристик жидких (условно-ньютоновских) и жидкообразных продуктов методами капиллярной вискозиметрии

3.2.1 Теория капиллярных вискозиметров

Среди множества типов вискозиметров для исследования вязкостных свойств пищевых масс в первую очередь следует рекомендовать капиллярные и ротационные вискозиметры, потому что теория обработки данных измерений на этих приборах наиболее детально разработана. Причем, если теория капиллярных вискозиметров проще, чем ротационных, и на капиллярных вискозиметрах сравнительно легко непосредственно моделировать и имитировать многие процессы формования и транспортирования пищевых масс, то при ротационной вискозиметрии требуется меньше испытываемой пищевой среды, проще достичь широкого диапазона скоростей сдвига и исследовать, кроме вязкостных свойств, вязкоупругие свойства пищевого продукта.

В литературе имеются также данные об инвариантности результатов капиллярной и ротационной вискозиметрии по сравнительному критерию инвариантности. Например, Кузнецов с сотрудниками исследовал свойства растворов желатина до 25 % на капиллярном вискозиметре типа Убеллоде—Гольда и на немецком ротационном вискозиметре «Реотест». Было обнаружено, что свойства высококонцентрированных растворов желатина можно описывать реологической моделью Шведова—Бингама, а сравнительная реометрия на

двух указанных приборах дала совпадение результатов в пределах 5—15 %. Эти данные еще раз подтверждают совершенство теории капиллярных и ротационных вискозиметров и позволяют отнести эти вискозиметры к группе условно–абсолютных приборов, если следовать функциональной системе классификации реометров.

В опытах на капиллярных вискозиметрах обычно измеряются объемный или весовой расход протекающей среды и перепад давления при известных длине и диаметре капилляра. Задачей теории вискозиметра является определение связи между скоростями и напряжением сдвига в исследуемой среде безотносительно размеров капилляра. Рассматривая ламинарный изотермический стационарный осесимметричный поток среды в капилляре, легко по уравнению равновесия определить напряжение сдвига в любом коаксиальном слое капилляра:

$$(p_2 - p_1)\pi r^2 - 2\pi r L\tau = 0 \qquad (3.1)$$

и

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2L} \qquad .\Delta p = p_2 - p_1 \qquad (3.2)$$

где τ — напряжение сдвига на цилиндрической поверхности участка потока; r — радиус мысленно вырезанного цилиндрического осесимметричного участка потока, равновесие которого рассматривается; L — расстояние между поперечными сечениями капилляра; p_1, p_2 — давление в начальном и конечном поперечных сечениях капилляра.

Как видно, напряжение сдвига не зависит от вязкостных свойств среды. Теперь необходимо по измеренному объемному расходу определить скорость сдвига; она разная в каждом слое текущей жидкости и зависит от реологического закона сдвигового течения среды, а закон этот априорно неизвестен, поскольку определение его является целью вискозиметрии.

Исходя из геометрических соображений, можно связать осесимметричный профиль скоростей потока с объемным расходом:

$$Q = 2\pi \int_0^R r v(r)\,\mathrm{d}\,r, \qquad (3.3)$$

где Q — объемный расход потока среды через поперечное сечение капилляра; R — радиус капилляра; $v(r)$ — неизвестная функция осесимметричного распределения скоростей в потоке.

Совершим с выражением (3.3) ряд очевидных преобразований и проведем интегрирование по частям:

$$Q = 2\pi \int_0^R v(r) \frac{\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{2}\right)}{\mathrm{d}\,r}\,\mathrm{d}\,r = 2\pi \left\{ \frac{v(r) r^2}{2}\Bigg|_0^R - \int_0^R \frac{r^2}{2}\left[\frac{\mathrm{d}\,v(r)}{\mathrm{d}\,r}\right]\mathrm{d}\,r \right\}. \qquad (3.4)$$

$$v(R)=0;\ \left.\frac{v(r)r^2}{2}\right|_0^R=0.$$

Полагаем отсутствие проскальзывания по стенке капилляра.
Тогда

$$Q=-\pi\int_0^R r^2\left[\frac{\mathrm{d}\,v(r)}{\mathrm{d}\,r}\right]\mathrm{d}\,r. \tag{3.5}$$

Заметим, что в квадратных скобках записана скорость сдвига.
Формула (3.2) позволяет вычислить напряжение сдвига на стенке капилляра:

$$\tau_R=\frac{\Delta pR}{2L}. \tag{3.6}$$

Выражения (3.2) и (3.6) позволяют записать связь между напряжениями сдвига без учета перепада давления и длины капилляра:

$$\tau=\frac{\tau_R r}{R}. \tag{3.7}$$

Произведем в правой части уравнения (3.5) замену переменных, используя формулу (3.7):

$$r=\frac{\tau R}{\tau_R};\ dr=\frac{R}{\tau_R}d\tau;\ \frac{dv(r)}{dr}=\dot\gamma(\tau);$$

$$Q=-\frac{\pi R^3}{\tau_R^3}\int_0^{\tau_R}\tau^2\dot\gamma(\tau)d\tau \tag{3.8}$$

$$\frac{\tau_R^3 Q}{\pi R^3}=-\int_0^{\tau_R}\tau^2\dot\gamma(\tau)d\tau. \tag{3.9}$$

Дифференцируем левую часть уравнения (3.9) по напряжению сдвига на стенке капилляра как произведение двух функций, а правую часть — по правилу Лейбница дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу:

$$\frac{1}{\pi R^3}\left(\tau_R^3\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,\tau_R}+3\tau_R^2 Q\right)=-\dot\gamma_R(\tau_R)\tau_R^2 \tag{3.10}$$

или

$$-\dot\gamma_R=\frac{1}{\pi R^3}\left(\tau_R\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,\tau_R}+3Q\right). \tag{3.11}$$

Формула (3.11) позволяет вычислить скорость сдвига на стенке капилляра. В этом же месте по формуле (3.6) можно рассчитать напряжение сдвига. Чтобы представить уравнение (3.11) через измеряемые при капиллярной вискозиметрии величины, воспользуемся еще раз формулой (3.6) и перепишем (3.11) в виде уравнения Рабиновича:

$$-\dot{\gamma}_R = \frac{1}{\pi R^3}\left(\Delta p \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\Delta p} + 3Q\right). \tag{3.12}$$

Таким образом, уравнения (3.6) и (3.7) лежат в основе теории капиллярной вискозиметрии и позволяют по измеренному объемному расходу и перепаду давления при известной геометрии капилляра без всяких предварительных предположений о виде связи между скоростью и напряжением сдвига получить эту искомую связь. Знак минус связан с тем, что $\Delta p < 0$.

При моделировании процессов переработки пищевых продуктов получают распространение математические методы вариационного исчисления, имеющие некоторые достоинства перед математическими моделями с краевыми задачами дифференциальных уравнений. Например, в реометрии для капиллярных вискозиметров можно получить необходимые зависимости на основе вариационного принципа:

$$J = \int_V \varphi \,\mathrm{d}v - \int_V \rho\vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}v - \int_S \vec{G}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}S; \tag{3.13}$$

$$\varphi(\varepsilon_{ij}) = \int_0^1 D(\lambda\varepsilon_{ij})\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}; \qquad D(\varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{3.14}$$

где J— функционал, задача об экстремуме которого соответствует принципу виртуальных работ (мощностей) для голономных диссипативных сплошных сред; $\varphi(\varepsilon_{ij})$— диссипативный потенциал; $D(\varepsilon_{ij})$— функция диссипации; ε_{ij} – тензор скоростей деформации.

В случае капиллярной вискозиметрии при изотермическом ламинарном течении несжимаемой ньютоновской жидкости в горизонтальном капилляре имеем

$$D(\varepsilon_{ij}) = \tau\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r};\ \varphi(\varepsilon_{ij}) = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2;\ \int\rho\vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}v = 0;$$

$$\mathrm{d}v = 2\pi rL\,\mathrm{d}r;\ \mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r, \tag{3.15}$$

где τ — касательное напряжение; r — текущий радиус капилляра; η — коэффициент динамической вязкости; L — длина капилляра.

Тогда с учетом предыдущих зависимостей запишем

$$J = 2\pi\int_0^R \Phi\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R\left[\frac{\eta}{2}\left(\frac{dv}{dr}\right)^2 rL + \Delta pvr\right]\mathrm{d}r \tag{3.16}$$

где R — внешний радиус капилляра.

По условию Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v'}\right) - \frac{\partial\Phi}{\mathrm{d}v} = 0 \tag{3.17}$$

где

$$v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{\Delta p}{L\eta} = 0. \qquad (3.18)$$

Решение уравнения (3.18) при условиях $v(R) = 0$, $v'(R) = 0$ дает возможность установить распределение скоростей в капилляре:

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta}\left(r^2 - R^2\right). \qquad (3.19)$$

Расход жидкости вычисляется с помощью интеграла

$$Q = 2\pi\int_R^0 rv(r)\mathrm{d}r = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8L\eta}. \qquad (3.20)$$

Пределы интегрирования переставлены местами, поскольку $\Delta p < 0$. Отслеживая допущения при выводе формул, можно сделать следующие выводы:

– формула (3.20) не учитывает входных и выходных потерь давления, следовательно, надо проводить опыты на двух одинаковых по входу, выходу и радиусу капиллярах разной длины L_l и L_2 и в формулы подставлять значения $L=L_2 - L_1$;

– нельзя забывать, что формула (3.20) выведена из условия ламинарности режима течения;

– нужно проверить условие прилипаемости $v_z|_{r=z} = 0$. Наличие неучтенного особого пристенного слоя может привести к очень большому занижению вязкости и большим ошибкам в реодинамических моделях при других условиях течения;

– пищевые материалы иногда имеют тиксотропные и реопектические свойства, вследствие чего жидкость на входе и выходе из капилляра может иметь различные структурно–механические, в том числе и вязкостные свойства.

Зная перепад давления и расход, по формуле (3.20) находим динамический коэффициент вязкости. Если из уравнения равновесия определить напряжение сдвига на стенке капилляра по формуле

$$\tau_R = \frac{R\Delta p}{2L}, \qquad (3.21)$$

то коэффициент вязкости можно определить с помощью выражения

$$\eta = \frac{\tau_R \pi R^3}{4Q}. \qquad (3.22)$$

Однако если реологическое уравнение имеет вид

$$\tau = k\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^n, \qquad (3.23)$$

то коэффициент эффективной вязкости следует рассчитать по формуле

$$\eta_{эф} = \left(\frac{n}{3n+1}\right)\frac{\tau_R \pi R^3}{Q}. \qquad (3.24)$$

Рассмотрим величину ошибки, если коэффициент вязкости для степенной жидкости все же рассчитать, как это иногда делается, по формуле для ньютоновской жидкости (3.22).

Пусть n = 0,5, тогда ошибка определения коэффициента вязкости выражается формулой

$$|\delta| = \left|\frac{\eta_{эф} - \eta}{\eta}\right| \cdot 100\% = 25\%. \qquad (3.25)$$

Отсюда следует, что для степенной модели жидкости, чтобы избежать ошибки, нужно скорость сдвига рассчитывать по выражению

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\pi R^3}\left[3Q + \Delta p \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}(\Delta p)}\right], \qquad (3.26)$$

и находить реологическое уравнение среды $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\tau)$ по формулам (3.21) и (3.26). Представим формулу (3.20) в общем виде:

$$Q = -\frac{\pi R^3}{\tau_w}\int_0^{\tau_w} \tau^2 \dot{\gamma}(\tau)\mathrm{d}r, \qquad (3.27)$$

тогда уравнение расхода для степенной модели жидкости приобретает вид

$$Q = -\frac{\pi R^3}{\tau_w}\int_0^{\tau_w} \tau^2 \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}\tau = \frac{n\pi R^3}{3n+1}\left(\frac{R\Delta p}{2Lk}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (3.28)$$

и переходит в формулу (3.20) при n = 1, $\kappa = \eta$.

Вариационный принцип возможных мощностей имеет некоторые вычислительные достоинства, если реологическое уравнение получено в виде эмпирической формулы при численном интегрировании и показывает связь между классической аналитической механикой и реодинамикой неньютоновских жидкостей.

В ряде случаев, особенно, если на капиллярном вискозиметре непосредственно моделируется (имитируется) течение в трубопроводах, используются консистентные переменные Рейнера. Перепишем уравнение Рабиновича (3.11) в виде

$$-\dot{\gamma}_R = \frac{3}{4}\left(\frac{4Q}{\pi R^3}\right) + \frac{\Delta p}{\pi R^3}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\Delta p}. \qquad (3.29)$$

Из выражения (3.6) получим

$$\Delta p = \frac{2L}{R}\tau_R;\ \mathrm{d}\Delta p = \frac{2L}{R}\mathrm{d}\tau_R. \qquad (3.30)$$

Подставим (3.30) во второе слагаемое правой части выражения (3.29), тогда

$$-\dot{\gamma}_R = \frac{3}{4}\left(\frac{4Q}{\pi R^3}\right) + \frac{\frac{\tau_R}{4}\mathrm{d}\left(\frac{4Q}{\pi R^3}\right)}{d\tau_R}. \tag{3.31}$$

Величины

$$V = \frac{4Q}{\pi R^3} \text{ и } P \equiv \tau_R = \frac{R\Delta p}{2L} \tag{3.32}$$

называются консистентными переменными Рейнера. В этих переменных (3.31) имеет вид

$$-\dot{\gamma}_R = \frac{3}{4}V + \frac{\tau_R}{4}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\,\tau_R}. \tag{3.33}$$

Поскольку реологическое уравнение среды, как связь между скоростями и напряжением сдвига на стенке капилляра, имеет вид

$$\tau_R = \mathrm{f}\left(\dot{\gamma}_R\right), \tag{3.34}$$

то

$$\tau_R = \mathrm{f}\left(-\frac{3}{4}V - \frac{\tau_R}{4}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\,\tau_R}\right). \tag{3.35}$$

Следовательно, между консистентными переменными Рейнера существует однозначная функциональная зависимость, и расчет любой трубы можно произвести на основании данных капиллярной вискозиметрии, если результаты опытов обработать в консистентных переменных Рейнера без определения связи между скоростями сдвига и касательными напряжениями. В этом смысле опыты на капиллярном вискозиметре являются опытами имитационной реометрии для трубопроводного транспорта.

Пусть, например, в результате капиллярной вискозиметрии получена связь между консистентными переменными Рейнера

$$\tau R = \mathrm{f}\left(V\right) \tag{3.36}$$

и нужно определить радиус R трубопровода при известных длине L, расходе Q и перепаде давления Δp. Очевидно, решение этой задачи получим в результате определения радиуса из уравнения (3.36), которое в данном случае запишем в виде

$$\frac{R\Delta p}{2L} - \mathrm{f}\left(\frac{4Q}{\pi R^3}\right) = 0 \tag{3.37}$$

Это уравнение можно решить либо методом последовательных приближений, либо графически, либо с помощью какой-нибудь стандартной программы математического пакета программ.

Еще проще задача, в которой нужно определить расход Q при известных радиусе R трубопровода, длине L и перепаде давления Δp. Тогда вычисляем значение консистентного переменного Рейнера:

$$\tau_R = \frac{R\Delta p}{2L}; \tag{3.38}$$

прямо на техническом графике результатов вискозиметрии в консистентных переменных Рейнера определяем вторую переменную V и вычисляем расход в трубопроводе по формуле

$$Q = \frac{V\pi R^3}{4}. \tag{3.39}$$

При использовании консистентных переменных для расчета трубопровода нет нужды ограничивать вид зависимости (3.36) особым требованием простоты, поскольку здесь уже не решается задача с дифференциальными уравнениями и можно применять любую из интерполяционных формул.

Приведенная теория справедлива для ламинарного изотермического установившегося течения, но для пищевых сред опасность перехода в турбулентный режим, как правило, не очень велика из-за большой вязкости большинства пищевых сред, пастообразных продуктов, перерабатываемых на пищевых машинах. С другой стороны, для пищевых сред сравнительно малой вязкости (молока, напитков, растительных масел, различных суспензий малой концентрации твердой фазы) можно использовать многочисленные результаты гидродинамики ньютоновских жидкостей.

Приведем конкретный пример использования капиллярного вискозиметра в реометрии пищевых продуктов. Разработка конструкций и определение оптимальных режимов работы машин технологической линии производства казеина требуют знания реологических свойств казеина.

Казеин представляет собой высоковязкий материал, обладающий определенной формосохраняющей способностью. По химическому составу это многокомпонентная среда, основой которой является молочный белок.

Опыты проводили на капиллярном вискозиметре по принятой методике с капиллярами длиной до 0,15 м и диаметром 0,008 и 0,01 м. Результаты замеров перепадов давления и средней скорости пересчитывали в консистентные переменные, связь между которыми инвариантна по отношению к размерам капилляров и зависит только от свойств материала. Кривые течения казеина в консистентных переменных можно описать эмпирической формулой

$$P = \tau_0 + aV^b, \tag{3.40}$$

где P, V — консистентные переменные Рейнера; τ_0, a, b — эмпирические коэффициенты.

Коэффициенты τ_0, a и b из формулы (3.40) и ее относительная ошибка s по сравнению с каждой экспериментальной точкой были рассчитаны на ЭВМ. Вязкостные свойства материала представляют в форме связи между скоростью сдвига и касательным напряжением. В данном случае эту связь можно получить в виде уравнения Гершеля–Балкли:

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n, \tag{3.41}$$

где τ_0, κ, n — реологические константы.

Переход от формулы (3.40) к (3.41) позволяет определить зависимости, вытекающие из определения консистентных переменных и уравнения Рабиновича:

$$\tau = P; \tag{3.42}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{4b}\left(1 + 3b + \frac{t_0}{aV^b}\right). \tag{3.43}$$

В табл. 3.6 приведены значения коэффициентов *к* и *n*, влаги *W*, температуры *T* казеина, максимальных скоростей сдвига $\dot{\gamma}_{\max}$ при вискозиметрировании и сроки хранения казеина *t*. Казеин хранили при комнатной температуре. Испытания образца казеина, который был заморожен и хранился при 268 *К* в течение суток, показали, что его предельное напряжение сдвига τ при комнатной температуре *T* превышало $3 \cdot 10^4$ Н/м^2.

Таблица 3.6

Реологические свойства казеина

a, Нс^b/м^2	*b*	τ_0	*k*, *Нс^b/м^2*	*n*	dγ/d*t* с$^{-1}$	$\lvert\varepsilon_{\max}\rvert$	*T*,К	*W*,%	*t*, сут
2430	0,342	0	2120	0,312	37	2,03	293	65	0
2480	0,574	6250	590	1,08	10,7	33,9	294	68	0,5
4290	0,262	11300	1160	0,571	60,2	12,0	293	66	2

Очевидно, казеин проявляет заметные неньютоновские свойства, причем с увеличением срока хранения растет предельное напряжение сдвига казеина. Свежий казеин практически не имеет предельного напряжения сдвига, его сдвиговое течение можно описать частным уравнением Гершеля-Балкли — уравнением Оствальда де Вале. Величины казеина *W* и *T*, при которых проводили вискозиметрирование, соответствуют его технологическим параметрам до гранулирования, поэтому полученные реологические свойства могут быть использованы для расчета гранулятора. Можно сделать следующие выводы:

1. Кривые течения, полученные капиллярным вискозиметрированием свежего казеина 65 %–ной влажности при температуре 293 К и скорости сдвига до 37 с$^{-1}$, можно описать уравнением Оствальда де Вале.

2. Вязкостные свойства казеина со сроком хранения от 0,5 до 2 суток при комнатной температуре и скорости сдвига до 70 с$^{-1}$ описываются уравнением Гершеля-Балкли.

3. Предельное напряжение сдвига казеина растет с увеличением времени хранения до двух суток и понижением температуры до 268 К.

Опыты с яичным меланжем тоже показали применимость реологических моделей Гершеля-Балкли и Оствальда де Вале, что еще раз подтверждает целесообразность использования этих малопараметрических эмпирических формул в реометрии пищевых материалов вместо громоздких общих интерполяционных формул.

3.2.2 Устройство, принцип действия капиллярных вискозиметров и методики расчета свойств исследуемых материалов

В качестве примера капиллярных вискозиметров рассмотрим устройство и принцип измерения вязкости вискозиметрами Оствальда и Убеллоде (рис.3.1). Эти вискозиметры представляют собой U–образные, установленные вертикально трубки, в одно колено которых впаян капилляр. У вискозиметра Оствальда определенное количество жидкости из левого резервуара от метки «А» до «В» перетекает в правый за счет гидростатического давления. В вискозиметре Убеллоде для истечения жидкости необходимо в одном колене создать давление или вакуум, это предопределяет его использование для исследования жидкообразных продуктов.

Особенно удобен в применении для жидкообразных продуктов и, в частности, слабоструктурированных (кефир, сырный и творожный сгустки) вискозиметр типа ВК–4, работающий в горизонтальном положении, что позволяет исключить поправки на гидростатическое давление столба жидкости, а его конструкция – уменьшить кратность механического воздействия. В этих вискозиметрах для обеспечения течения жидкости через капилляр создается разрежение.

Для поддержания заданной температуры исследуемой жидкости вискозиметры Оствальда и Убеллоде помещают в жидкостной ультратермостат, вискозиметры типа ВК имеют собственную водяную баню. Кроме названных имеются различные модификации капиллярных вискозиметров.

Методика измерения с помощью капиллярных вискозиметров принципиально одинакова для любых конструкций приборов. Они могут работать как абсолютные, когда величину вязкости и константу прибора определяют в случае течения за счет гидростатического напора по формулам

$$\eta = \frac{\pi g h D^4}{128 V l}\rho\tau = kP\tau \qquad (3.44)$$

где $\pi g h D^4 / (128 V l) = k$ – постоянная прибора; h – удельный гидростатический напор, м; D – диаметр капилляра, м; V – объем протекающей исследуемой жидкости, м^3; l – длина капилляра, м; ρ – плотность исследуемой жидкости, кг/м^3; τ – продолжительность истечения объема V исследуемой жидкости, или в случае принудительного течения за счет создаваемой разности давлений.

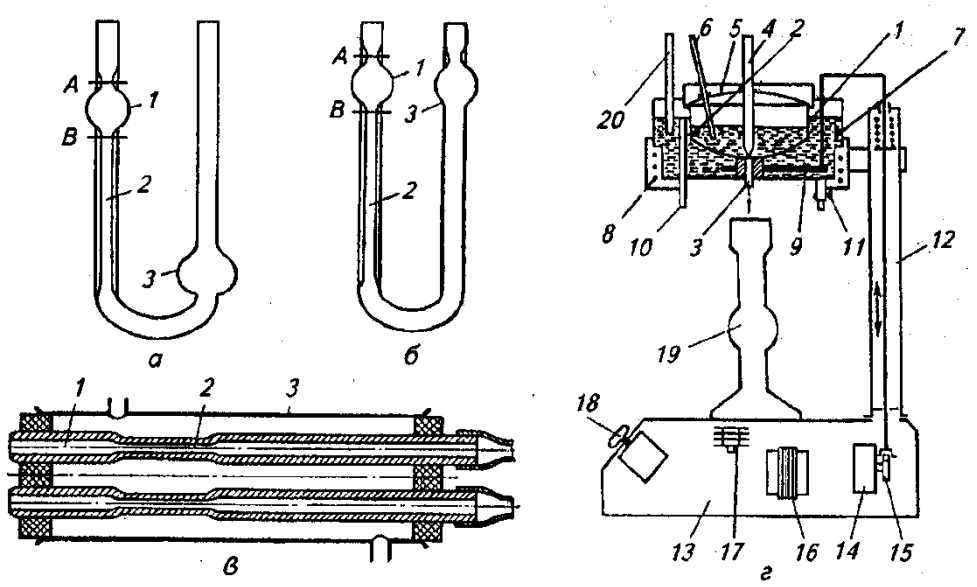


Рис. 3.1– Принципиальные схемы вискозиметров для определения вязкости ньютоновских жидкостей и жидкообразных систем:
а – Оствальда; б – Убеллоде; в – вискозиметр ВК–4,
г – вискозиметр Энглера

1 – шарик для измерения объема протекающей через капилляр жидкости; 2 – капилляр; 3 – шарик для сбора жидкости; в – с двумя параллельно работающими капиллярами: 1 – широкая трубка; 2 – капилляр; 3 – водяная рубашка; г – вискозиметр Энглера: 1 – латунная ванна; 2 – крючки для контроля уровня исследуемой жидкости; 3 – капиллярный насадок; 4 – стержень игольчатого клапана; 5 – крышка ванны; 6 – термометр; 7 – водяная баня; 8 – электронагреватель; 9 – мешалка; 10 – перепускная трубка; 11 – сливной кран; 12– стойка; 13 – основание прибора; 14 – электропривод мешалки; 15 – кулачок–толкатель; 16 – трансформатор; 17 – выпрямитель переменного тока; 18 – переключатель терморегулятора; 19 – мерный приемник жидкости; 20 – термометр

$$\eta = \frac{\pi p D^4}{128 V l}\tau = kP\tau, \qquad (3.45)$$

где $k = \pi D^4 / (128 V l)$ – постоянная прибора; p – разность гидростатического давления на входе и выходе капилляра.

Иногда на практике капиллярные вискозиметры используют как относительные приборы.

В случае течения продукта за счет гидростатического напора его вязкость

$$\eta = \eta_в \frac{\rho\tau}{\rho_в \tau_в}, \qquad (3.46)$$

где $\eta_в$ – коэффициент динамической вязкости дистиллированной воды при температуре исследуемого продукта, Па·с; $\rho_в$ – плотность дистиллированной воды

при той же температуре, кг/м^3; $\tau_в$ – время истечения объема дистиллированной воды при указанных выше параметрах и равенстве объемов воды и исследуемого продукта, с.

В случае принудительного течения за счет создаваемой разности давления p

$$\eta = \eta_в \frac{\tau}{\tau_в} \qquad (3.47)$$

Для жидкообразных продуктов вискозиметрические данные, аппроксимируемые уравнением Оствальда де Валле, предпочтительно обрабатывать на графиках в консистентных переменных:

$\theta_C = pR/(2l) = pD/(4l)$ – консистентная переменная – "напряжение сдвига";

$\dot{\gamma} = 32V/(\pi D^3\tau) = 32V_C/(\pi D^3) = 8w/D$ – консистентная переменная – "градиент скорости".

Результаты измерений заносят в соответствующий для каждого типа приборов журнал наблюдений:

Для вискозиметра Оствальда:

Продукт	№ опыта	Температура t, ^{0}C	Плотность продукта ρ, кг/м^3	Время истечения τ, с	Константа прибора k, м^2/с^2	Вязкость η, Па·с

Для вискозиметра Убеллоде:

Продукт	№ опыта	Температура t,^{0}C	Избыточное давление или вакуум p, Па	Время истечения τ, с	Безразмер. константа прибора	Вязкость η, Па·с

Для горизонтальных вискозиметров (типа ВК–4):

Температура t, ^{0}C	Диаметр капилляра D, м	Величина вакуума ρ, Па	Объем протекания V, м^3	Время истечения τ, с	Скорость сдвига $\dot{\gamma}$, с$^{-1}$	Напряжение сдвига θ_c, Па

По полученным данным в логарифмических координатах с осями $X = \lg\dot{\gamma}$ и $Y = \lg\theta_C$, наносят все экспериментальные точки и графически аппроксимируют их в первом приближении прямой линией таким образом, чтобы число точек сверху и снизу было одинаково, не считая тех, через которые проходит линия. Чтобы точнее определить положение прямой, пользуются методом наименьших квадратов.

Уравнение прямой в логарифмических шкалах $y = ax + b$. Для определения коэффициентов a и b берут две не экспериментальные точки, принадлежащие этой прямой и максимально удаленные друг от друга, и составляют систему уравнений

$$y_1 = ax_1 + b \qquad y_2 = ax_2 + b$$

Решив эту систему, находят

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \qquad b = y_1 - ax_1, \qquad \text{или} \quad b = y_2 - ax_2$$

Полученные значения коэффициентов подставляют в уравнение прямой и записывают его в виде

$$\lg \Theta_c = a \lg \dot{\gamma} + \lg b$$

и после потенцирования находят

$$\Theta_c = b(\dot{\gamma})^a,$$

в котором $a = n$ — индексу течения (первая реологическая константа), а

$$b = B_0^* \cdot \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n$$

Из последнего выражения определяют значение второй реологической константы B_0 (Па·с) — коэффициента эффективной вязкости при единичной скорости сдвига.

Помимо вышеперечисленных, теоретически обоснованных вискозиметров с длинными капиллярами существуют вискозиметры с короткими капиллярами-насадками, не имеющие достаточного теоретического обоснования. После измерения на них времени истечения жидкости для расчета вязкости используют различные эмпирические формулы, которые не всегда дают достоверный результат. Наиболее сопоставимые результаты вискозиметрии для данного типа приборов получают на вискозиметрах Энглера (рис. 3.1, г). Вискозиметры Энглера применяют для определения коэффициентов кинематической и динамической вязкости молочных продуктов, условно относящихся к ньютоновским жидкостям, и сопоставительного текстурного анализа жидкообразных молочных продуктов в широком диапазоне изменения их температур.

Вязкость, $\upsilon_э$ испытуемой жидкости, измеряемая прибором, характеризуется градусами Энглера (^0E)

$$\upsilon_э = \tau_{ж} / \tau_{дв}, \qquad (3.48)$$

где $\tau_ж$ – определяемое время истечения через насадок прибора 200 мл испытуемой жидкости, с; $\tau_{дв}$ – время истечения такого же объема дистиллированной воды при 20 ^{0}С.

Время истечения 200 см^3 дистиллированной воды при 20 ^{0}С составляет 50 – 52 *с* что соответствует величине кинематической вязкости $\upsilon = 10^{-6}$, м^2/с.

Таким образом, градус Энглера представляет собой относительную величину вязкости, которую по соответствующим экспериментальным формулам можно привести к истинным значениям вязкости. При исследованиях данные и результаты опытов заносят в журнал наблюдений

Продукт	№ опыта	Температура t, ^{0}C	Время истечения τ, *с*	Расчетное значение вязкости $\upsilon_э$, ^{0}E	Кинематическая вязкость υ, м^2/с	Плотность продукта ρ,кг/м^3	Ньютоновская (динамическая вязкость) η, Па·с

По средним значениям при каждой из выбранных температур необходимо вычислить вязкость, (^0E) по предыдущей формуле, приняв время истечения дистиллированной воды $\tau_{дв}$, равным 51 с, что обеспечит погрешность измерений на различных вискозиметрах Энглера не более 2 %.

Пересчитывают $\upsilon_э$, в кинематическую вязкость, пользуясь формулами Убеллоде

$$\upsilon = \left(0{,}0732\upsilon_э - \frac{0{,}0631}{^0E}\right)\cdot 10^{-4} \qquad (3.49)$$

или Фогеля

$$\upsilon = 0{,}01\upsilon_э \cdot 7{,}6 \cdot \left(1 - \frac{1}{^0E}\right)\cdot 10^{-4} \qquad (3.50)$$

Определяют плотность исследуемого продукта при заданной температуре. Рассчитывают динамическую вязкость по формуле

$$\eta = \upsilon\rho \qquad (3.51)$$

3.3 Ротационная вискозиметрия

3.3.1 Теория ротационных вискозиметров

Рассмотрим расчетную схему ротационного вискозиметра типа немецкого вискозиметра «Реотест», в котором внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается (на нем измеряются крутящий момент и угловая скорость). Схема прибора показана на рис. 3.2. Течение полагаем стационарным, ламинарным, изотермическим. Компоненты скорости течения вдоль продольной оси цилиндров и в направлении радиуса полагаем равными нулю. Следовательно, реологические эффекты второго порядка: эффекты Вейссенберга, Пойнтинга, вихри Тейлора — в рамках данной теории не описываются.

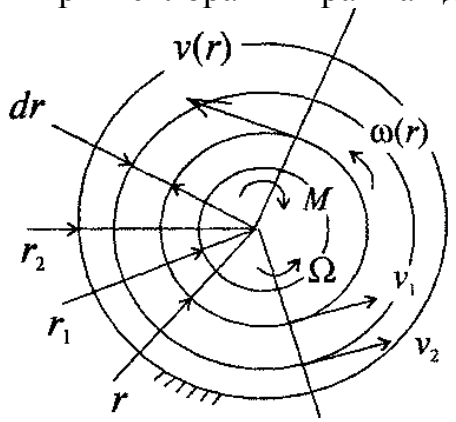


Рис. 3.2 – Расчётная схема ротационного вискозиметра

Запишем уравнение равновесия в моментах относительно оси вращения мысленно выделенного цилиндрического осесимметричного элемента вискозиметра с ротором и слоем жидкости, на который действуют активный момент на роторе и реактивный момент от сил вязкого трения на внешней поверхности цилиндра жидкости:

$$2\pi r^2 L\tau - M_L = 0, \tag{3.52}$$

где r — текущий радиус; L — длина цилиндров; τ — касательное напряжение на поверхности цилиндра жидкости с радиусом r; M_L — крутящий момент, активный момент.

Тогда

$$\tau(r) = \frac{M}{2\pi r^2};\ \tau_1 = \tau(r_1) = \frac{M}{2\pi r_1^2};\ \tau_2 = \tau(r_2) = \frac{M}{2\pi r_2^2}, \tag{3.53}$$

где $M = M_L / L$; крутящий момент на единицу длины цилиндров; τ_1, τ_2 – касательное напряжение на рабочих поверхностях внутреннего и наружного цилиндров; r_1 — наружный радиус внутреннего цилиндра (ротора); r_2 — внутренний радиус неподвижного наружного цилиндра.

Такой же результат можно получить из уравнений движения в цилиндрических координатах. Из кинематических соображений запишем скорость сдвига в жидкости в цилиндрических координатах:

$$\dot\gamma(r) = \frac{\omega r + r\dfrac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,r}\mathrm{d}\,r - \omega r}{\mathrm{d}\,r} = r\frac{\mathrm{d}\,\omega(r)}{\mathrm{d}\,r} = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \frac{\mathrm{d}\,v(r)}{\mathrm{d}\,r} - \frac{v(r)}{r}, \tag{3.54}$$

где $\dot\gamma(r)$ — скорость сдвига на поверхности цилиндра жидкости с текущим радиусом; $v(r)$ — угловая скорость цилиндра жидкости с текущим радиусом; $\omega(r)$ — линейная скорость точек цилиндра жидкости с текущим радиусом.

Реологическое уравнение жидкости с учетом выражений (3.53) можно записать следующим образом:

$$\dot\gamma = f(\tau) = f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) \tag{3.55}$$

Из этой записи следует, что эффекты *тиксотропии* и *реопексии* лежат вне данной теории, хотя в принципе ротационные вискозиметры достаточно удобные приборы для изучения этих реологических нестационарностей. С математической точки зрения важно, чтобы функция (3.55) была однозначной и удовлетворяла обычным условиям непрерывности и дифференцируемости, что автоматически обеспечивает физическая природа реологического уравнения.

Из уравнений (3.54) и (3.55) запишем

$$\int_{\omega(r)}^{0} \mathrm{d}\,\omega(r) = \int_{v(r)/r}^{0} \mathrm{d}\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int_{r}^{r_2} \mathrm{f}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{\mathrm{d}\,r}{r}. \tag{3.66}$$

Заметим, что при записи верхних пределов интегрирования полагают прилипаемость жидкости к поверхности неподвижного цилиндра вискозиметра

$v(r_2) = 0$, $\omega(r_2) = 0$. Проведя интегрирование и поменяв местами пределы интегрирования, получим

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \int_{r_2}^{r} \mathrm{f}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{\mathrm{d}\,r}{r}. \tag{3.67}$$

Продифференцируем первое уравнение из выражений (3.53) и немного его преобразуем:

$$\frac{\mathrm{d}[\tau(r)]}{\mathrm{d}\,r} = -\frac{M}{\pi r^3};\ \frac{\mathrm{d}[\tau(r)]r}{2\,\mathrm{d}\,r} = -\frac{M}{2\pi r^2} = \tau(r). \tag{3.68}$$

Тогда выражение (3.67) в новых переменных интегрирования в правой части, опять поменяв местами пределы интегрирования, можно переписать в виде

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_2} \mathrm{f}(\tau)\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} \tag{3.69}$$

Чтобы связать напряжение с измеряемой на вискозиметре угловой скоростью ротора, примем текущий радиус за радиус ротора и запишем выражение (3.69) в виде

$$\Omega = \omega(r_1) = \frac{v(r_1)}{r_1} = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{f}(\tau)\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau}. \tag{3.70}$$

Выведем самое распространенное в теории ротационных вискозиметров – формулу Маргулеса. Примем за реологическое уравнение линейное уравнение ньютоновской жидкости и проведем интегрирование правой части выражения (3.70):

$$\mathrm{f}(\tau) = \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta};$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\tau}{\eta}\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\eta}. \tag{3.71}$$

Подставим в (3.71) величины касательных напряжений из формул (3.53) и получим формулу Маргулеса:

$$\Omega = \frac{\dfrac{M}{2\pi r_2^2} - \dfrac{M}{2\pi r_1^2}}{2\eta} = \frac{M}{4\eta\pi}\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2}\right). \tag{3.72}$$

Следовательно, коэффициент динамической вязкости ньютоновской жидкости с аналитической точки зрения можно определить однократным измерением момента на роторе и угловой скорости его вращения:

$$\eta = \frac{M\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{4\Omega\pi r_1^2 r_2^2}. \tag{3.73}$$

Повторные опыты нужно проводить лишь для получения статистических вероятностных показателей, на которые указывалось в начале данной главы. Поскольку момент и угловая скорость имеют разные знаки, коэффициент вязкости будет положительным. Формулу (3.73) можно использовать при вискозиметрировании таких текучих пищевых материалов, как молоко, растительные масла и различные растворы и суспензии с малой концентрацией твердой фазы.

Если конструкция вискозиметра такова, что ротор вращается в условно–бесконечной среде жидкости, то нужно изменить краевые условия и проводить интегрирование по формуле (3.66) следующим образом:

$$\int\limits_{\frac{v(r)}{r}}^{0} \mathrm{d}\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int\limits_{r}^{\infty} \mathrm{f}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{\mathrm{d}\,r}{r}. \tag{3.74}$$

Далее аналогично (3.66)—(3.73) запишем

$$\Omega = \frac{v(r_1)}{r_1} = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{0} \mathrm{f}(\tau)\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} = -\frac{\tau_1}{2\eta} = -\frac{M}{4\pi\eta r_1^2} \tag{3.75}$$

или

$$\eta = -\frac{M}{4\Omega\pi r_1^2}. \tag{3.76}$$

Этот же результат можно получить в пределе непосредственно из формулы (3.73):

$$\eta = \lim_{r_2\to\infty} \frac{M\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)}{4\Omega\pi r_1^2} = -\frac{M}{4\Omega\pi r_1^2}. \tag{3.77}$$

Иногда в формулах (3.73) и (3.77) приписывают сомножителем ускорение свободного падения, что не нужно делать, как легко установить из элементарного анализа размерностей в гостированной системе единиц СИ:

$$\eta[\text{Па}\cdot\text{с}] = \eta\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\rho\right] = -\frac{M[\text{Н}]}{4\Omega[\text{с}^{-1}]\ \pi r_1^2[\text{м}^2]}. \tag{3.78}$$

В некоторых старых изданиях в качестве единицы измерения коэффициента внутреннего трения (вязкости) используется *пуаз* или *сантипуаз*, поэтому приведем связь между единицами:

$$1\ \text{пуаз} = 10^{-2}\ \ \text{сантипуаз} = 1\ \frac{\text{дин}\cdot\text{с}}{\text{см}^2} = 9{,}81\cdot10^{-2}\ \ \text{Па}\cdot\text{с};$$

$$1\ \text{дин} = 9{,}81\cdot10^{-6}\ \ \text{Н};\ \ 1\ \text{Па} = 1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \tag{3.79}$$

Сомножитель, равный ускорению свободного падения, в формуле (3.73) появляется при переводе коэффициента вязкости из сантипуаз в единицы СИ [Па·с].

Во многих конструкциях вискозиметров типа вискозиметра Куэтта внешний цилиндр вращается с угловой скоростью ω, а момент M измеряется на внутреннем неподвижном цилиндре с помощью торсионных измерительных систем, где момент является реактивным. В этом случае активный момент на внешнем цилиндре и угловая скорость совпадают по знаку. Приведем вывод формулы Маргулеса для данной конструкции, для чего выражение (3.66) перепишем в виде

$$\int_0^{\omega(r)} \mathrm{d}\,\omega(r) = \int_0^{\frac{v(r)}{r}} \mathrm{d}\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int_{r_1}^{r} \mathrm{f}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{\mathrm{d}\,r}{r} \tag{3.80}$$

Далее, следуя выводу (3.66)—(3.73), запишем

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \int_{r_1}^{r} \mathrm{f}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\frac{\mathrm{d}\,r}{r}; \tag{3.81}$$

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_1} \mathrm{f}(\tau)\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau}; \tag{3.82}$$

$$\Omega = \omega(r_2) = \frac{v(r_2)}{r_2} = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} \mathrm{f}(\tau)\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} \tag{3.83}$$

Подставим в (3.81) реологическое уравнение ньютоновской жидкости и определим распределение скоростей течения по радиусу:

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \int_{r_1}^{r} \frac{M}{2\pi\eta r^2}\frac{\mathrm{d}\,r}{r} = \frac{M}{4\pi\eta}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right);$$

$$v(r) = \frac{M}{4\pi\eta}\left(\frac{r}{r_1^2} - \frac{1}{r}\right). \tag{3.84}$$

Из (3.83) получим угловую скорость:

$$\Omega = \omega(r_2) = \frac{v(r_2)}{r_2} = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{\tau}{\eta}\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\eta}. \tag{3.85}$$

Откуда, аналогично (3.73), получим формулу Маргулеса для определения коэффициента динамической вязкости с той только лишь разницей, что радиусы поменялись местами:

$$\eta = \frac{M\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{4\Omega\pi r_1^2 r_2^2}. \tag{3.86}$$

В предыдущих решенных задачах на определенном этапе предполагали, что жидкость подчиняется реологическому уравнению Ньютона. В действительности при вискозиметрировании пищевых сред, особенно большой вязкости, это предположение не корректно. Мы не знаем вида реологического уравнения среды, а именно определение этого уравнения является целью ротационного вискозиметрирования, как и капиллярного вискозиметрирования, где эта проблема решалась с помощью уравнения Рабиновича.

Сформулируем задачу следующим образом: определить вид функции $\mathrm{f}(\tau)=\dot{\gamma}$ на ротационном вискозиметре, для определенности — типа вискозиметра Куэтта. Введем следующие обозначения, используя выражения (3.53):

$$\frac{r_2}{r_1}=\alpha;\ \frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\alpha^{-2};\ r=r_1\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}};\ dr=-\frac{1}{2}r_1\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}d\tau. \quad (3.87)$$

На основании (3.54) запишем

$$\mathrm{d}\,\omega=\frac{\dot{\gamma}(\tau)}{r}\mathrm{d}\,r=-\frac{1}{2}\tau^{-1}\dot{\gamma}(\tau)\mathrm{d}\,\tau. \quad (3.88)$$

Проведем интегрирование:

$$\int_0^{\Omega}\mathrm{d}\,\omega=-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\tau^{-1}\dot{\gamma}(\tau)\mathrm{d}\,\tau; \quad (3.89)$$

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_{\tau_1\alpha^{-2}}^{\tau_1}\tau^{-1}\dot{\gamma}(\tau)\mathrm{d}\,\tau. \quad (3.90)$$

Дифференцируя (3.90) по ϕ_1 как и при выводе уравнения Рабиновича, получим выражение вида

$$\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,\tau_1}=\frac{1}{2\tau_1}\left[\dot{\gamma}(\tau_1)-\alpha^2\dot{\gamma}\left(\tau_1\alpha^{-2}\right)\right] \quad (3.91)$$

Однако выражение (3.91) не позволяет так просто, как формула (3.12), выразить скорости сдвига на стенке внешнего цилиндра. Из уравнения равновесия легко вычислить касательные напряжения, и дальнейшая прямая аналогия с теорией капиллярных вискозиметров исключается.

Уравнение (3.90) называется линейным интегральным уравнением типа Вольтерра. Применительно к ротационной вискозиметрии его решил в 1953 г. Павловский, который вывел следующее выражение для вычисления скоростей сдвига:

$$\dot{\gamma}_1(\tau_1)=2\tau_1\sum_{\beta=0}^{\infty}\alpha^{-\beta}\,\frac{\mathrm{d}\left[\Omega\left(\alpha^{-2\beta}\tau_1\right)\right]}{\mathrm{d}\,\tau_1}. \quad (3.92)$$

Следовательно, получив технические кривые вискозиметрирования в координатах моментов и угловых скоростей, определив по формуле $\tau_1=\tau(r_1)=M\big/2\pi r_1^2$ через моменты касательные напряжения на поверхности

внутреннего цилиндра, по формуле Павловского можно рассчитать скорости сдвига на этой же поверхности и подобрать с помощью какого–либо метода, описанного в начале данной главы, подходящий вид эмпирического реологического уравнения.

Формула Павловского позволяет оценить погрешность, возникающую при ротационном вискозиметрировании, если коэффициент эффективной вязкости неньютоновской жидкости рассчитывать по формуле Маргулеса, что делается весьма часто. Между тем формула Маргулеса справедлива лишь для ньютоновских жидкостей.

Введем новый геометрический симплекс c, пусть вискозиметрируют степенную жидкость типа жидкости Оствальда де Вале, имеющую реологическое уравнение вида

$$\dot{\gamma}(\tau)=\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}};\ c=\alpha^{-1}=\frac{r_1}{r_2}. \tag{3.93}$$

Если рассчитывать эффективную скорость сдвига и эффективный коэффициент вязкости по формуле Маргулеса, то получим

$$\tilde{\eta}_{эф}^{M}=\frac{M\left(r_1^2-r_2^2\right)}{4\Omega\pi r_1^2 r_2^2};\ \dot{\gamma}_{1\ эф}^{M}=\frac{\tau_1}{\tilde{\eta}_{эф}^{M}};$$

$$\tau_1=\tau(r_1)=\frac{M}{2\pi r_1^2};\ \dot{\gamma}_{1\ эф}^{M}=\frac{2\Omega}{1-c^2}. \tag{3.94}$$

Вычислим по формуле (3.90) угловую скорость для степенной жидкости:

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_{\tau_1\alpha^{-2}}^{\tau_1}\tau^{-1}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}d\tau=\frac{n}{2}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1-c^{\frac{2}{n}}\right). \tag{3.95}$$

Тогда по формулам (3.94) и (3.95) вычислим коэффициент эффективной вязкости:

$$\tilde{\eta}_{эф}^{M}=\frac{\tau_1}{\dot{\gamma}_{1\ эф}^{M}}=\frac{\tau_1\left(1-c^2\right)}{2\Omega}=\frac{\tau_1\left(1-c^2\right)}{n\left(\frac{\tau_1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1-c^{\frac{2}{n}}\right)}. \tag{3.96}$$

Формула (3.96) неточна, поскольку использовалась формула Маргулеса, она справедлива только для ньютоновской жидкости. Погрешность обусловлена неточностью расчета скорости сдвига на стенке внутреннего цилиндра. Рассчитаем эту скорость по формуле Павловского и сравним результаты по эффективному коэффициенту динамической вязкости:

$$\delta = \left(\frac{\tilde{\eta}_{эф}^{M} - \tilde{\eta}_{эф}^{П}}{\tilde{\eta}_{эф}^{П}} \right) \cdot 100\% = \left[\left(\frac{1-c^2}{n} \right) \sum_{\beta=0}^{\infty} c^{\frac{2\beta}{n}} - 1 \right] \cdot 100\%. \quad (3.97)$$

Расчет показывает, что при $a = n = 0{,}5$ погрешность равна 20 %. При $n = 1$, т. е. при ньютоновской жидкости, погрешность равна нулю.

В учебных целях рассмотрим некоторые преобразования повторно.

Пусть

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \quad (3.98)$$

Из уравнения равновесия (2.30):

$$\tau(r) = \frac{M}{2\pi \cdot r^2} \quad (3.99)$$

Преобразуем уравнение равновесия (3.99):

$$\tau(r) r^2 = \frac{M}{2\pi} \quad (3.100)$$

и продифференцируем это выражение:

$$\frac{d}{dr}\left[\tau(r) \cdot r^2\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{M}{2\pi}\right], \quad (3.101)$$

где правая часть уравнения константа. Тогда

$$\frac{d\tau(r)}{dr} \cdot r^2 + \tau(r) \cdot 2r = 0 \quad (3.102)$$

и

$$\frac{dr}{r} = -\frac{d\tau}{2\tau}. \quad (3.103)$$

Из кинематики (3.54)

$$\dot{\gamma}(r) = r\frac{d\omega(r)}{dr} = r\frac{d}{dr}\left[\frac{v(r)}{r}\right] = f\left(\frac{M}{2\pi \cdot r^2}\right) \quad (3.104)$$

Пусть краевые условия $v(r_1) = 0; v(r_2) = r_2\Omega$.

Преобразуем (3.54) и проведем интегрирование

$$\int_0^{\frac{v(r)}{r}} d\left[\frac{v(r)}{r}\right] = \int_{r_1}^{r} \frac{1}{r} f\left(\frac{M}{2\pi \cdot r^2}\right) dr \quad (3.105)$$

Далее

$$\frac{v(r)}{r} = \int_{r_1}^{r} f\left(\frac{M}{2\pi \cdot r^2}\right)\frac{dr}{r} \quad (3.106)$$

Пусть $r = r_2$ тогда

$$\Omega = \frac{v(r_2)}{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{f}\left(\frac{M}{2\pi \cdot r^2}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{3.107}$$

Очевидно, с учетом (3.103) и (3.104)

$$\Omega = \frac{v(r_2)}{r_2} = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} \dot{\gamma}(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \tag{3.108}$$

В некоторых случаях можно получить простые алгоритмы нахождения реологических констант, если вид реологического уравнения известен. Действительно, выражение (3.108) получено из уравнения равновесия (2.30) и кинематических соображений (2.31), поэтому эти выражения не содержат информацию о реологической природе среды. Запишем выражение (3.108) в следующем виде

$$\boldsymbol{\Omega = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1} \dot{\gamma}(\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}} \tag{3.109}$$

Пусть вискозиметрируется среда Оствальда де Виля (степенная жидкость).Тогда (3.109) интегрируется так :

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\tau_1}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\tau\frac{d\tau}{\tau} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\tau_1^{\frac{1}{n}} - \tau_2^{\frac{1}{n}}\right) \tag{3.110}$$

На вискозиметре измеряется угловая скорость Ω и удельный крутящий момент на единицу длины ротора M, тогда формула (3.110) приобретает вид:

$$\Omega = \frac{n}{2}\left(\frac{M}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\left(\frac{1}{r_1^2}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{1}{r_2^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \tag{3.111}$$

Учитывая вышеизложенное, можно сделать вывод, что ротационная вискозиметрия требует проверки следующих требований, вытекающих из условий вывода предыдущих формул:

1. При вискозиметрии надо исключить концевые эффекты параллельными опытами на роторах разной длины и одного радиуса.
2. Обеспечить ламинарность течения.
3. Проверить отсутствие пристенного проскальзывания.
4. Проверить среду на тиксотропию и реопексию.
5. Для жидкостей с ньютоновской вязкостью можно использовать формулу Маргулеса, для неньютоновских жидкостей при обработке данных вискозиметрирования надо использовать формулу Павловского.

3.3.2 Устройство, принцип действия ротационных вискозиметров и методики расчета свойств исследуемых материалов

В настоящее время конструкций ротационных вискозиметров насчитывается несколько сотен, которые можно разделить на две основные группы. К первой группе относятся приборы, имеющие постоянный момент вращения ротора при переменной частоте вращения. Вторую группу составляют приборы, имеющие постоянную частоту вращения ротора при переменном вращающем моменте.

В России и странах СНГ наибольшее распространение получили вискозиметры системы проф. Воларовича РВ–8, относящиеся к первой группе, и вискозиметры «Реотест», относящиеся ко второй (рис. 3.3). Исследование процесса течения грубодисперсных систем, к которым относят, например, творог и творожные изделия, проводят на вискозиметрах РВ–8.

Методика измерения структурно–механических характеристик для ротационных вискозиметров системы Воларовича сводится к подготовке прибора, измерениям и разборке. Подготовка включает установку вискозиметра по уровню, определение силы трения в подшипниках, заполнение рабочего объема исследуемым материалом и его термостатирование. Во время измерений меняют массу грузов M (кг) и для каждого груза определяют частоту вращения ротора N (максимальная частота вращения может достигать 2 – 2,5 об/с). Каждый опыт состоит из 30 – 40 замеров, проводимых несколько раз с постепенным увеличением и уменьшением массы грузов. Одновременно строят реограммы $N = f(M)$. Затем прибор разбирают для мытья и определения высоты продукта h(м) по оставленным им следам на роторе. После этого определяют константы опыта по формулам:

$$k = R_{\text{шк}} g / 8\pi^2 \left(\frac{R_н^2 R_в^2}{R_н^2 + R_в^2} h + \frac{R_н^3 R_в^3}{R_н^3 + R_в^3} \right), \qquad (3.112)$$

$$k_0 = R_{\text{шк}} g /(2\pi R_в^2 h + \pi^2 R_в^2 / 4) , \qquad (3.113)$$

$$k_1 = 2\pi R_{\text{н}}^2 h /(R_{\text{шк}} g) , \qquad (3.114)$$

$$k_2 = \frac{\ln(R_{\text{н}} / R_{\text{в}})}{2\pi}, \qquad (3.115)$$

где g – ускорение свободного падения, м/с2; $R_{\text{шк}}$ – радиус шкива, м; $R_{\text{н}}$ – внутренний радиус стакана, м; $R_{\text{в}}$ – радиус ротора, м;

h — глубина погружения ротора в продукт, м.

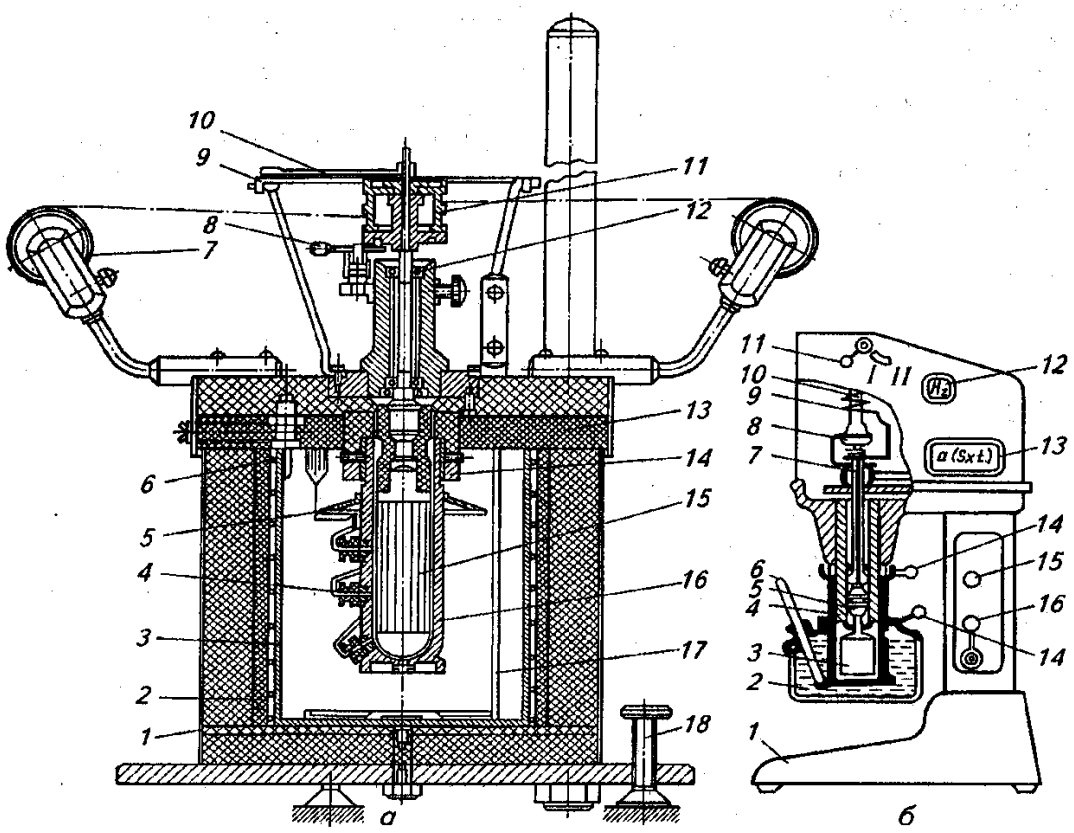


Рис. 3.3 – Ротационные вискозиметры:

а – РВ–8 – системы Воларовича: 1 – корпус со станиной; 2 – асбестовый сосуд; 3 – вставной сосуд для термостатирующей жидкости; 4 – термопара; 5 – отражательное кольцо; 6 – электронагревательный элемент; 7 – шкив; 8 – тормозное приспособление; 9 – шкала отсчета; 10 – стрелка; 11 – барабан; 12 – подшипник; 13 –крышка прибора; 14 – обойма для стакана; 15 – ротор; 16 – стакан; 17 – мешалка; 18 – установочный винт;

б – вискозиметр «Реотест»: 1 – станина; 2 – термостатная емкость; 3 – ротор; 4 – стакан; 5 – соединение измерительного вала с валом привода; 6 – термометр; 7 – измерительный вал; 8 – потенциометр; 9 – пружинный динамометр (торсион); 10 – вал привода; 11– ступенчатый регулятор динамометра; 12 – частотомер; 13 – шкала логометра; 14 – стопорные рукоятки фиксаторов; 15 – шкала ступени частоты вращения; 16 – рукоятка переключения ступени

Вычисляют эффективную вязкость для каждой опытной точки по уравнению:

$$\eta_{эф} = kM / N \qquad (3.116)$$

Строят график зависимости эффективной вязкости от окружной скорости $\varpi = 2\pi R_e N$ в логарифмических шкалах. Через полученные экспериментальные точки проводят прямую линию так, чтобы она делила относительные отклонения расстояний между точками и прямой на равные части. Составляют уравнение этой прямой, определяют темп разрушения структуры *m,* значение коэффициента эффективной вязкости по формуле

$$\eta_{эф} = B(\omega/\omega_1)^{-m} = B\omega_*^{-m}, \quad (3.117)$$

где B – эффективная вязкость при фиксированном значении окружной скорости, Па·с; ω_1 – фиксированное единичное значение окружной скорости боковой поверхности ротора коаксиально–цилиндрического вискозиметра (ω_1 = 1м/с); ω_*^{-m} – безразмерная окружная скорость (ее числовое значение).

После определения по полученным экспериментальным данным индекса течения $n = 1 - m$ рассчитывают инвариантную для любых коаксиально-цилиндрических ротационных вискозиметров реологическую константу – B_0^* по формуле

$$B_0^* = B\left\{\frac{\dot{\gamma}_1 n R_в\left[1-\left(R_в/R_н\right)^{2/n}\right]}{2\omega_1}\right\}^{n-1}, \quad (3.118)$$

учитывающей закон изменения градиента скорости. Затем вычисляют реологические константы – предельное напряжение сдвига θ_0 и пластическую вязкость $\eta_{пл}$, ориентируясь на график зависимости N(M). При этом точки для вычислений берут непосредственно с кривой θ_0 и $\eta_{пл}$ определяют в следующей последовательности. Предельное напряжение сдвига θ_0 (Па) соответствует отрезку, отсекаемому кривой $N(M)$ по оси абсцисс (M_0). Его определяют по формуле

$$\Theta_0 = k_0 M_0 \quad (3.119)$$

Напряжение сдвига на поверхности ротора

$$\Theta = k_0 M \quad (3.120)$$

Пластическую вязкость в зависимости от того, распространяется ли сдвиг на всю толщину кольца продукта (в зазоре между ротором и стаканом), рассчитывают по одной из приведенных ниже формул.

Первый случай – сдвиг распространяется на всю толщину кольца, когда масса нагрузки M_0 больше массы нагрузки $M_1 = k_1\theta_0$. В этом случае пластическую вязкость определяют по формуле

$$\eta_{пл} = (kM - k_2\Theta_0)/N$$

Все расчеты пластической вязкости, когда сдвиг распространяется на всю толщину кольца исследуемого продукта, рекомендуется сводить в таблицу

Константа опыта k =			k_2 =		
N	M	kM	$k_1\Theta_0$	$kM - k_2\Theta_0$	$\eta_{пл} = (kM - k_2\Theta_0)/N$

Второй случай (наиболее часто встречающийся при течении в зазоре творога и творожных изделий) – сдвиг не распространяется на всю толщину кольца, когда масса нагрузки M_0 меньше массы нагрузки M_1:

$$\eta_{пл} = (\Theta_0/N)(1/4\pi)[(M/M_0) - 1 - \ln(M/M_0)] \quad (3.121)$$

или

$$\eta_{пл} = (\Theta_0/N)F(M/M_0) \quad (3.122)$$

$$F(M/M_0) = (1/4\pi)[(M/M_0) - 1 - \ln(M/M_0)] \qquad (3.123)$$

3.4 ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ ПЛАСТОМЕТРОВ

Принцип действия конического пластометра Ребиндера ясен из расчетной схемы (рис. 3.4). Конический индентор внедряется в испытываемую среду силой *P* и достигает равновесия под действием этой силы и сил внутреннего сопротивления среды.

Измеряется глубина внедрения конуса и по известным вертикальной силе и угле при вершине конуса рассчитываются реологические показатели свойств среды, приборов для измерения твердости в материаловедении. Известно, что при попытках связать показатели твердости металлов с предельным напряжением текучести или временной прочности возникают определенные трудности и появляется необходимость использования эмпирических данных. Можно ожидать, что в теории конических пластометров возникают такие же проблемы.

Действительно, Ребиндер и Ямпольский назвали расчетный реологический параметр среды пластической прочностью и предложили для ее расчета две формулы:

$$\tau = \left(\frac{1}{\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\frac{P}{h^2} = k_\alpha\frac{P}{h^2}; \qquad (3.124)$$

$$\tau^1 = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\frac{P}{h^2} = k_\alpha^1\frac{P}{h^2}. \qquad (3.125)$$

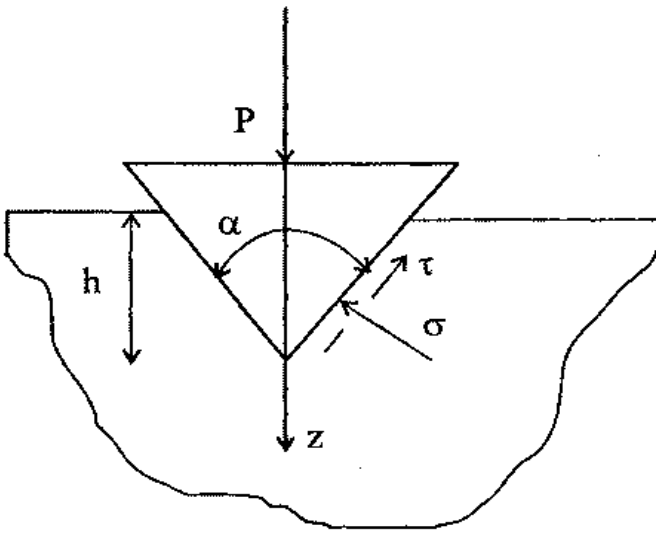


Рис. 3.4 – Расчетная схема конического пластометра Ребиндера

Однако оба расчетных параметра не являются предельным напряжением сдвига среды. В частности, по формуле (3.124) получаемый параметр в 1,5—2,5 раза больше, чем действительное предельное напряжение сдвига среды, которое можно определить на реометрах других конструкций.

Если полагать, что расчетная величина независима от угла конуса и соот-

ношения силы и квадрата глубины пенетрации, то она инвариантна к параметрам прибора и условиям опыта. Формулы Ребиндера удобны и в том смысле, что они линейны к силе и расчетный параметр можно определить на основании одного опыта. В практике измерений обычно ступенчато наращивают вертикальную силу, измеряют прирост глубины пенетрации и получают более точно величину расчетного параметра — пластической прочности.

Если параметр пластической прочности предполагают использовать для контроля технологических процессов и связывают его с такими показателями, как, например, температура, состав среды или другими показателями технологического процесса, то не возникнет никакой проблемы, поскольку будет использоваться относительная величина механически *не совсем ясного* реологического параметра — пластической прочности. Однако в целях использования опытной величины для реодинамического моделирования процессов течения или формосохранения нужен объективный безотносительный показатель — *предельное напряжение сдвига*.

Задачу получения на коническом пластометре предельного напряжения сдвига среды решали Агранат, Воларович и Широков, используя для этого задачу теории пластичности о проникновении конуса в пластичную полуплоскость. В результате они аналитически получили коэффициент, зависящий от угла при вершине конуса, вида

$$\begin{aligned}\left(k_{\alpha}^{11}\right)^{-1} &= \pi\cdot \mathrm{tg}^{2}\,\alpha\left\{2\alpha - 2\left(\sin\alpha+1\right)^{2}\ln\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+1}+\right.\\ &+\left[1-\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(2\sin\alpha+1\right)^{2}\ln\frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha+1}+\\ &+\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]+\mathrm{ctg}^{2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\\ &\left.\cdot\ln\frac{2}{\mathrm{ctg}\,\alpha+1}+\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\left(2\sin\alpha+1\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3.126}$$

Тогда формула Ребиндера с коэффициентом конуса Аграната— Воларовича— Широкова действительно стала давать хорошие результаты при угле при вершине конуса около 60°, совпадающие с предельным напряжением сдвига, измеренным на пластометрах других конструкций. Коэффициент Ямпольского—Ребиндера при угле 60° равняется 0,413; коэффициент Аграната–Воларовича—Широкова составляет 0,214. Теперь с помощью пластометра Ребиндера можно найти предельное напряжение сдвига (Н/м^2) материала изделий по формуле

$$\tau_0 = k\frac{P}{h^2}, \tag{3.127}$$

где *к* — коэффициент прибора, функция угла при вершине конуса; *P*— вертикальная сила, вдавливающая конус в материал, Н;

h — глубина проникновения конуса в материал, м.

Однако расчеты, произведенные с использованием методов теории распознавания образов, показали, что в этом случае предельное напряжение сдвига оказывается функцией угла при вершине конуса, что особенно заметно при малых углах. Объясняется это тем, что при выводе корректирующего коэффициента было использовано решение задачи теории пластичности с учетом только нормальных напряжений на поверхности конуса, а поскольку уравнение (3.127) по существу является уравнением равновесия конуса в проекциях на вертикальную ось, то при углах при вершине конуса более 60° касательные напряжения, имеющие место на поверхности конуса, не вносят существенного вклада в уравнение равновесия. Расчеты показали, что если коэффициент Ямпольского—Ребиндера при угле конуса 10° равен 3,61, то коэффициент Аграната–Воларовича–Широкова составляет 7,25, что значительно искажает результаты измерений предельного напряжения сдвига, которые в этом случае нельзя использовать при реодинамическом математическом моделировании процессов переработки пищевых продуктов.

Разумеется, для контроля качества и управления технологическими процессами, когда абсолютные значения предельного напряжения сдвига не так важны, можно пользоваться любой из приведенных констант прибора. Следует отметить, что если исследуемый материал не прилипает к поверхности конуса и касательными напряжениями можно пренебречь, то вывод Аграната—Воларовича—Широкова теоретически обоснован. Однако большинство мясомолочных продуктов проявляют существенные адгезионные свойства при взаимодействии с металлом конуса прибора.

Зависимость коэффициента Аграната—Воларовича—Широкова от угла при вершине конуса вынудила искать решение, учитывающее наличие касательных напряжений на поверхности конуса и позволяющее использовать данные конического пластометра при малых углах конуса пенетрометра.

Запишем условие равновесия конуса в проекциях на вертикальную ось:

$$P - \sigma \sin\frac{\alpha}{2} S_k - \tau \cos\frac{\alpha}{2} S_k = 0, \qquad (3.128)$$

где σ, τ — нормальное и касательное напряжения на поверхности конуса в предположении, что они распределены равномерно;
S_k — площадь внедренной части конуса.
Из геометрии получим, что

$$S_k = \pi h^2 \sec\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (3.129)$$

Полагаем

$$\sigma = E\varepsilon;\ \tau = G\gamma;\ G = \frac{E}{2(1+\mu)};\ \varepsilon = \gamma \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ \mu = 0{,}5, \qquad (3.130)$$

где E, G— модули упругости первого и второго рода; ε, γ— деформации растяжения–сжатия и сдвига; μ — коэффициент Пуассона.
С помощью выражений (3.130) преобразуем выражение (3.128) к виду

$$P = \sigma\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)S_k. \qquad (3.131)$$

По гипотезе максимальных касательных напряжений теории пластичности запишем

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2}. \qquad (3.132)$$

С учетом (3.131) выразим из (3.132) максимальные нормальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{6\tau_0\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 4}}. \qquad (3.133)$$

Запишем условие эквивалентности проекций нормальных сил на вертикальную ось при равномерном распределении нормальных напряжений и при действительном распределении, что было определено в решении Аграната–Воларовича—Широкова без учета касательных напряжений:

$$\sigma\sin\frac{\alpha}{2}S_k = \sigma_{\max}\frac{h^2}{2k_\alpha^{11}} \qquad (3.134)$$

или

$$\sigma\sin\frac{\alpha}{2}S_k = \sigma_{\max}\frac{h^2}{2k_\alpha^{11}} \qquad (3.135)$$

С учетом формулы (3.135) перепишем формулу (3.131) в виде

$$P = \tau_0 h^2\frac{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}{k_\alpha^{11}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 4}} \qquad (3.136)$$

или

$$\tau_0 P = \left(k_\alpha^{11}\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 4}}{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}\right)\frac{P}{h^2} = k_\alpha^{111}\frac{P}{h^2}. \qquad (3.137)$$

Значения всех коэффициентов приведены в таблице 3.7.

Таблица 3.7

Коэффициенты конического пластометра

Коэффициенты	Угол α, град				
	30	45	60	90	120
k_α (Ребиндер – Ямпольский)	1,109	6,658	0,413	0,159	0,0459
k_α^{1} (Ребиндер – Ямпольский)	4,436	1,856	0,956	0,318	0,1074
k_α^{11} (Агранат Воларович–Широков)	0,959	0,416	0,214	0,073	0,0217
k_α^{111} (Арет)	0,456	0,268	0,164	0,0657	0,0209

Для определения коэффициента прибора k_α^{111} с помощью пакета программ *MathCad* были введены следующие расчетные формулы:

$$k_\alpha^{111} = q\left[w\left(i + j + v + \delta\right)\right]^{-1}; \tag{3.138}$$

$$q = \frac{\operatorname{tg}\beta\sqrt{9\operatorname{tg}^2\beta + 4}}{3\operatorname{tg}\beta + 1}; \tag{3.139}$$

$$w = \pi\operatorname{tg}^2\beta; \tag{3.140}$$

$$i = 2\beta - 2\left(\sin\beta + 1\right)^2 \ln\left(\frac{\sin\beta}{\sin\beta + 1}\right); \tag{3.141}$$

$$j = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\right]\left(2\sin\beta + 1\right)^2 \ln\left(\frac{2\sin\beta}{2\sin\beta + 1}\right); \tag{3.142}$$

$$v = \left\{\left(\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\right)\left[\cot\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)^2\right]\ln\frac{2}{\cot\beta + 1}\right\}; \tag{3.143}$$

$$\delta = \left(\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\right)\left[\cot\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \left(2\sin\beta + 1\right)\right]; \tag{3.144}$$

$$\beta = \frac{\pi \cdot z}{360}, \tag{3.145}$$

где z — угол при вершине конуса.

С использованием формул (3.138)—(3.145), а также формул других авторов была составлена программа расчета, заполнена приведенная таблица коэффициентов в зависимости от угла при вершине конуса и построены графики (рис. 3.5).

Из рис. 3.5 видно, что значение коэффициента κ_2 уже при угле 20° превышает значение коэффициента k_1 Использование последнего приводит к значительным завышениям предельного напряжения сдвига исследуемого материала,

хотя получаемая величина пластической прочности удовлетворительно инвариантна к углу при вершине конуса.

Заметим, что наш поправочный сомножитель, корректирующий формулу Аграната—Воларовича—Широкова, имеет следующий предел:

$$\lim_{\alpha \to 180^\circ} \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{9\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+4}}{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1} = 1, \qquad (3.146)$$

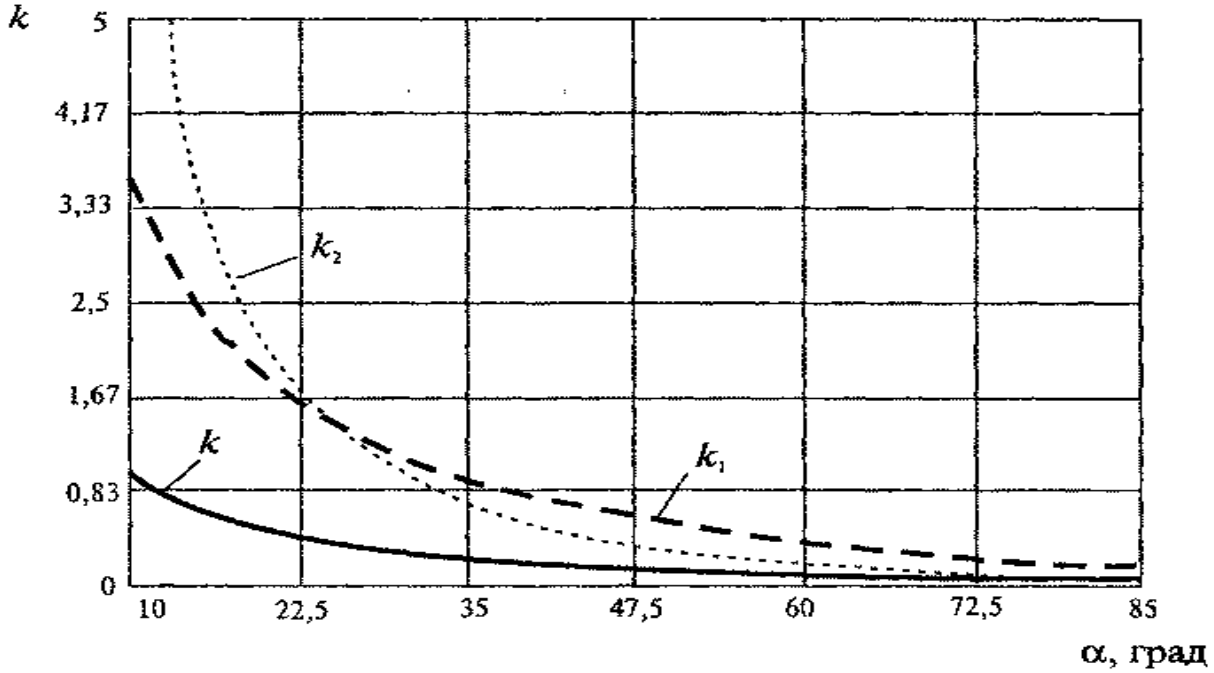


Рис. 3.5 – К определению предельного напряжения сдвига пищевых продуктов по формуле (3.137) с помощью: $к_1$ – коэффициента Ребиндера–Ямпольского; $к_2$ – коэффициента Аграната–Воларовича–Широкова; к – коэффициент Арета(α – угол при вершине конуса)

Чего и следовало ожидать, поскольку этот множитель учитывает наличие касательных напряжений в уравнении равновесия в проекциях на вертикальную ось, а при росте угла роль этих напряжений в уравнении уменьшается. Становится также ясно, почему коэффициент Аграната—Воларовича—Широкова при углах более 60° работает вполне удовлетворительно. При меньших углах необходимо использовать коэффициент проф. Арета В.А. В заключение хочется отметить, что весьма основательно использовал конический пластометр в своих работах московский профессор В. Д. Косой. В них можно ознакомиться с обзором и анализом литературы на данную тему.

Контрольные вопросы

1. Как может быть реализовано одномерное стационарное сдвиговое течение?
2. Перечислите реометры одномерного сдвигового течения.
3. Для исследования свойств каких материалов применяют капиллярные вискозиметры постоянного давления?
4. Для исследования свойств каких материалов применяют капиллярные вискозиметры высокого давления?
5. Для исследования свойств каких материалов применяют ротационные вискозимеры с соосными цилиндрами?
6. На чем основан принцип измерения вискозиметров Стокса?
7. Назовите методы определения консистенции и реологических характеристик материалов на основе комплексного нагружения по Боурну.
8. Какие величины определяют с помощью пенетрометров, трибометров, адгезиометров, компрессионных приборов?
9. Что измеряют в опытах на капиллярных вискозиметрах?
10. Напишите формулу объемног расхода потока среды через поперечное сечение капилляра в обющем виде.
11. Какой формулой расчитывается коэффициент эффективной вязкости?
12. Изменение каких параметров учитывает уравнение Рабиновича для капиллярного вискозиметра?
13. Как выражены консистентные переменные Рейнера и какую роль они играют в реологических расчетах?
14. Какие особенности реологического поведения казеина установлены с помощью капиллярной вискозиметрии?
15. Нарисуйте схемы и поясните устройство и отличия вискозиметров Оствальда и Убеллоде.
16. Изложите методику проведения эксперимента на вискозиметре Энглера.
17. Нарисуйте и поясните расчётную схему ротационного вискозиметра.
18. Напишите уравнение равновесия в моментах относительно оси вращения ротора вискозиметра «Реотест».
19. Напишите формулу Маргулеса для угловой скорости вращения ротора вискозиметра.
20. Напишите формулу Маргулеса для определения коэффициента динамической вязкости.
21. Какие требования требует проверки ротационная вискозиметрия?
22. На какие две основные группы можно разделить конструкции ротационных вискозиметров?
23. Изложите методику проведения экспериментов на ротационном вискозиметре Воларовича РВ-8.
24. Нарисуйте и поясните расчетную схему конического пластометра Ребиндера.
25. С какой целью на конусе пластометра наносят рифление, как оно распо-

ложено?

26. Приведите формулу Ребиндера и Ямпольского для конического пластометра.

27. Почему расчетные параметры, получаемые по формулам Ребиндера и Ямпольского, не являются предельным напряжением сдвига среды?

28. Какие явления при деформировании и течении среды при внедрении в нее конуса не позволяют получить значение предельного напряжения сдвига?

29. Как по гипотезе максимальных касательных напряжений теории пластичности определяются предельные напряжения сдвига?

Глава 4 РЕОДИНАМИКА

4.1 Течение среды Гершеля–Балкли в горизонтальной трубе круглого сечения при наличии пристенного проскальзывания

Ниже следует постановка и решение в общем виде задачи ламинарного течения вязкопластических нелинейных сред в круглых прямых трубах с формированием в потоке центрального ядра и при наличии явления проскальзывания (несоблюдение условия прилипания к стенке). Задачу решил проф. В.В. Пеленко.

Для определения профиля скоростей в области сдвигового течения воспользуемся известным степенным реологическим уравнением (Гершеля-Балкли) нелинейного вязкопластического материала:

$$\tau = \tau_0 + \mu_\rho \dot{\gamma}^n, \tag{4.1}$$

Это уравнение можно записать:

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \mathrm{f}\left(\tau_{(r)}\right), \tag{4.2}$$

откуда

$$v_{(r)} = \int \mathrm{f}\left(\tau_{(r)}\right)\mathrm{d}r + C, \tag{4.3}$$

тогда

$$v_{(r)} = \int \mathrm{f}\left(\tau_{(r)}\right)\mathrm{d}r + C. \tag{4.4}$$

В рассматриваемом случае

$$\mathrm{f}\left(\tau\right) = \left[\frac{1}{\mu_\rho}\left(\tau - \tau_0\right)\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{4.5}$$

Для течения в круглой трубе из уравнения равновесия следует:

$$\tau = \frac{r\Delta P}{2l}, \tag{4.6}$$

тогда

$$\mathrm{f}\left(\tau_{(r)}\right) = \left[\frac{1}{\mu_\rho}\left(\frac{r\Delta P}{2l} - \tau_0\right)\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{4.7}$$

С учетом (4.7), уравнение (4.4) примет вид:

$$v(r) = \int \left[\frac{1}{\mu_\rho}\left(\frac{r\Delta P}{2l} - \tau_0\right)\right]^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}r + C = \left(\frac{\Delta P}{2l\mu_\rho}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}\left(r - \frac{2\tau_0 l}{\Delta P}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C; \tag{4.8}$$

при $r = R$ постоянная интегрирования запишется:

$$C = v(R) - \left(\frac{\Delta P}{2l\mu_\rho} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(R - \frac{2\tau_0 l}{\Delta P} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (4.9)$$

Не останавливаясь на простейшем случае течения картофельной мезги в условиях нулевой скорости на стенке (условие прилипания), рассмотрим более сложный вариант, с учетом явления проскальзывания потока на стенке трубы, выполненный профессором Пеленко В. В.

Условие проскальзывания запишем в виде:

$$V(R) = V(r)_{|r=R} = (1-\varphi) V_{\max}; \quad (4.10)$$

$0 \le \varphi \le 1$ - коэффициент прилипания.

С учетом соотношения (4.10), уравнение (4.8) примет вид:

$$(1-\varphi) V_{\max} = \frac{2l}{\frac{1}{\mu^n \Delta P}} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta P}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} + C; \quad (4.11)$$

$$C = (1-\varphi) V_{\max} - \frac{2l}{\frac{1}{\mu^n \Delta P}} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta P}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (4.12)$$

Подставляя найденное значение «*C*» в (4.8), получим:

$$V(r) = \frac{2l}{\frac{1}{\mu^n \Delta P}} \frac{n}{n+1} \left(r \frac{\Delta P}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} - \frac{2l}{\frac{1}{\mu^n \Delta P}} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta P}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} + (1-\varphi) V_{\max} \quad ;(4.13)$$

$$V(R_0) = V_{\text{стержня}} = (1-\varphi) V_{\max} - \frac{2l}{\frac{1}{\mu^n \Delta P}} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta P}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}, \quad (4.14)$$

т.к. $V_{\max} = V_{\text{стержня}}$, то

$$V_{\text{стержня}} = -\frac{1}{\varphi} \frac{2l}{\frac{1}{\mu^n \Delta P}} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta P}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}, \quad (4.15)$$

тогда

$$V(r)=\frac{2l}{\mu^{\frac{1}{n}}\Delta P}\frac{n}{n+1}\left[\left(r\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\varphi}\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (4.16)$$

Полный суммарный расход составит величину:

$$Q=Q_{\text{сдв}}+Q_{\text{стерж}}. \quad (4.17)$$

$$Q_{\text{сдв}}=2\pi\int_{R_0}^{R}V(r)rdr=2\pi\frac{2l}{\mu^{\frac{1}{n}}\Delta P^{n+1}}\int_{R_0}^{R}\left[\begin{array}{l}\left(r\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}-\\-\frac{1}{\varphi}\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}\end{array}\right]r\,\mathrm{d}\,r, \quad (4.18)$$

после преобразований получим:

$$Q_{\text{сдв}}=\left(-\frac{2l}{\Delta P}\right)^3\frac{\pi n}{\mu^{\frac{1}{n}}(n+1)}\left\{\begin{array}{l}\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{3n+1}{n}}\left[\frac{3n-2\varphi n+1}{\varphi(3n+1)}\right]+\\+2\tau_0\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{2n+1}{n}}\left[\frac{2n-\varphi n+1}{\varphi(2n+1)}\right]\end{array}\right\}. \quad (4.19)$$

$$Q_{\text{стерж}}=2\pi\int_{\mathrm{R}_0}^{R}V_{\text{стерж}}rdr=-2\pi\int_{R_0}^{R}\frac{1}{\varphi}\frac{2l}{\mu^{\frac{1}{n}}\Delta P}\frac{n}{n+1}\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}r\,\mathrm{d}\,r, \quad (4.20)$$

или:

$$Q_{\text{стерж}}=\pi R_0^2\frac{1}{\varphi}\left(-\frac{2l}{\Delta P}\right)\frac{1}{\mu^{\frac{1}{n}}}\frac{n}{n+1}\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (4.21)$$

С учетом $R_0 = (2l/\Delta p)\tau_0$, окончательное значение полного суммарного расхода приобретает следующий вид, позволяющий осуществлять гидродинамические расчеты существенно нелинейных вязкопластических материалов, а так же конструктивные расчеты аппаратов:

$$Q=\left(-\frac{2l}{\Delta P}\right)^3\frac{\pi n}{\varphi\mu^{\frac{1}{n}}(n+1)}\left\{\begin{array}{l}\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{3n+1}{n}}\left[\frac{3n-2\varphi n+1}{\varphi(3n+1)}\right]+\\+2\tau_0\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{2n+1}{n}}\left[\frac{2n-\varphi n+1}{\varphi(2n+1)}\right]+\tau_0^2\left(R\frac{\Delta P}{2l}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}\end{array}\right\}. \quad (4.22)$$

4.2 Течение пищевых сред в щелевом канале. Ламинарное течение ньютоновской жидкости в щелевом канале (в>>н)

Перепад давлений Δp:

$$\Delta p = p_2 - p_1. \tag{4.23}$$

Заметим, что

$$\Delta p < 0, \tag{4.24}$$

поскольку

$$p_1 > p_2 \tag{4.25}$$

Запишем уравнение равновесия сил, действующих на выделенный слой толщиной $2x$, в проекциях на ось Z:

$$\sum F_{ZI} = 0 \tag{4.26}$$

Полагаем равномерное распределение напряжения и давления по площадкам действия:

$$-2\tau BL + \Delta p 2xB = 0. \tag{4.27}$$

Откуда касательные напряжения определяются формулой вида:

$$\tau = \frac{\Delta p x}{L}. \tag{4.28}$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 4.1.

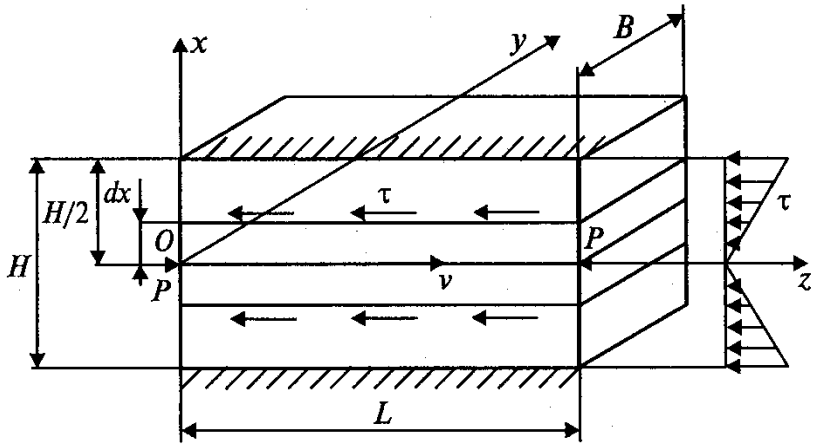


Рис. 4.1 – Расчетная схема щелевого канала

Запишем реологический закон течения среды Ньютона в виде:

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} = \eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}. \tag{4.29}$$

Разделим переменные:

$$\eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta p x}{L}. \tag{4.30}$$

Интегрируем:

$$\int d\upsilon = \frac{\Delta p}{L\eta}\int x\,\mathrm{d}\,x; \tag{4.31}$$

$$\upsilon = \frac{\Delta p x^2}{2L\eta} + C_1, \tag{4.32}$$

где C_1 - константа интегрирования.

Полагая прилипаемость среды к стенкам канала, запишем граничные условия:

$$x = \pm\frac{H}{2};\ \upsilon = 0. \tag{4.33}$$

Подставляем условия (4.33) в формулу (4.32)

$$0 = \frac{\Delta p}{2L\eta}\cdot\frac{H^2}{4} + C_1. \tag{4.34}$$

Откуда константа C_1:

$$C_1 = -\frac{\Delta p H^2}{8L\eta}. \tag{4.35}$$

Окончательно распределение скоростей имеет вид:

$$\upsilon = \frac{\Delta p x^2}{2L\eta} - \frac{\Delta p H^2}{8L\eta} = \frac{\Delta p}{2L\eta}\left(x^2 - \frac{H^2}{4}\right). \tag{4.36}$$

Легко видеть, что максимальная скорость будет при $x = 0$:

$$\upsilon_{\max}\big|_{x=0} = -\frac{\Delta p H^2}{8L\eta}. \tag{4.37}$$

Находим объемный расход, интегрируя по площади эпюру скоростей и умножив результат на ширину канала B (рис. 4.2).

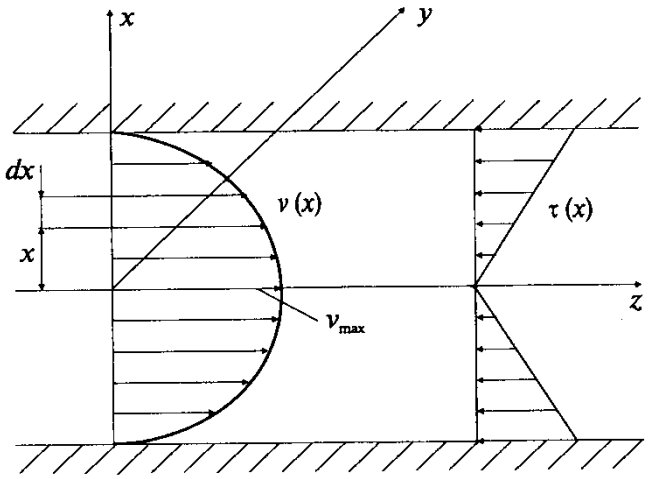


Рис. 4.2 – Эпюры скоростей течения
и касательных напряжений в щелевом канале

При этом полагаем, что в силу $B>>H$ можно пренебречь тормозящим действием боковых вертикальных стенок канала, то есть скорость течения не зависит от координаты y ($v(y)$ = const). Следовательно, действительный расход будет несколько меньше расчетного.

Используем определенный интеграл, записав в учебных целях решение детально:

$$Q = B\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \upsilon \,\mathrm{d}\,x = \frac{B\Delta p}{2L\eta}\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(x^2 - \frac{H^2}{4}\right)\mathrm{d}\,x = \frac{B\Delta P}{2L\eta}\left(\frac{x^3}{3}\left|\begin{matrix}\frac{H}{2}\\ -\frac{H}{2}\end{matrix}\right. - \frac{H^2}{4}\,x\left|\begin{matrix}\frac{H}{2}\\ -\frac{H}{2}\end{matrix}\right.\right) =$$

$$= \frac{B\Delta p}{2L\eta}\left\{\left[\frac{H^3}{24} - \left(-\frac{H^3}{24}\right)\right] - \left[\frac{H^2}{4}\left(\frac{H}{2} + \frac{H}{2}\right)\right]\right\} = \qquad (4.38)$$

$$= \frac{B\Delta p}{2L\eta}\left(\frac{2H^3}{24} - \frac{H^3}{4}\right) = \frac{B\Delta p}{2L\eta}\left(\frac{H^3}{12} - \frac{3H^3}{12}\right) =$$

$$= -\frac{B\Delta p}{2L\eta}\cdot\frac{2H^3}{12} = -\frac{BH^3\Delta p}{12L\eta}.$$

4.3 Течение степенной жидкости в щелевом канале

Рассмотрим теперь ламинарное течение среды Оствальда Де Виля (степенной жидкости) в щелевом канале.

Реологическое уравнение имеет вид:

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \qquad (4.39)$$

или

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (4.40)$$

Заменим τ и $\dot{\gamma}$ по формуле (4.28) и (4.29) в формуле (4.40), затем разделим переменные:

$$\mathrm{d}\,\upsilon = \left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}\,x. \qquad (4.41)$$

Интегрируем:

$$\upsilon = \left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{n+1}\right)x^{\frac{n+1}{n}} + C_1. \qquad (4.42)$$

Находим константу интегрирования по граничным условиям:

$$x = \left|\frac{H}{2}\right|;\ \upsilon = 0; \tag{4.43}$$

$$0 = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{|H|}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C_1. \tag{4.44}$$

Скорость течения в направлении оси Z как функция координаты X имеет вид:

$$\begin{aligned}\upsilon &= \left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{|H|}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}\left[x^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{|H|}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right].\end{aligned} \tag{4.45}$$

Координату x максимальной скорости течения находим по условию:

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{4.46}$$

По формуле (4.41) получим:

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}. \tag{4.47}$$

Приравняем производную (4.47) нулю:

$$0 = \left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}, \tag{4.48}$$

откуда

$$x = 0. \tag{4.49}$$

Подставляя координату (4.49) в формулу (4.45), получим значение максимальной скорости течения:

$$\upsilon_{\max} = -\frac{n}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{|H|}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}. \tag{3.50}$$

Определим расход, интегрируя аналогично выражению (4.38), однако, заметив симметрию эпюры (рис. 4.2), пределы интеграла определим от 0 до $H/2$, а результат интегрирования умножим на 2.

$$Q = 2B\int_0^{\frac{H}{2}} \upsilon \,\mathrm{d}\,x = \frac{2Bn}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{H}{2}} \left[x^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{|H|}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \mathrm{d}\,x =$$

$$= \frac{2Bn}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ \frac{n}{1+2n} x^{\frac{1+2n}{n}} \Big|_0^{\frac{H}{2}} - \left(\frac{|H|}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} x \Big|_0^{\frac{H}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{2Bn}{1+n}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{n}{1+2n}\left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{1+2n}{n}} - \left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{1+2n}{n}} \right] =$$

$$= \frac{2Bn}{1+n}\left(\frac{\Delta p}{KL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{1+2n}{n}} \left(\frac{n}{1+2n} - 1\right). \qquad (4.51)$$

Заметим, что при $K = \eta$ и $n = 1$ формула (4.51) преобразуется в формулу (4.38).

4.4 Ламинарное течение неньютоновской жидкости в щелевом канале

Рассмотрим теперь задачу течения в общем виде, наложив на реологический закон течения ограничение аналитичности, что обеспечивается физической природой закона.

$$\tau = f(\dot{\gamma}). \qquad (4.52)$$

Ход решения задачи приведем без комментариев, поскольку он аналогичен двум предыдущим задачам:

$$\dot{\gamma} = F(\tau) = \dot{\gamma}(\tau); \qquad (4.53)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\upsilon}{\mathrm{d}\,x} = \dot{\gamma}(\tau); \qquad (4.54)$$

$$\mathrm{d}\,\upsilon = \dot{\gamma}\left(\frac{\Delta p x}{L}\right)\mathrm{d}\,x; \qquad (4.55)$$

$$\upsilon = \int \dot{\gamma}\left(\frac{\Delta p x}{L}\right)\mathrm{d}\,x; \qquad (4.56)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau}{dx} = \frac{\Delta p}{L}; \qquad (4.57)$$

$$\mathrm{d}\,x = \frac{L}{\Delta P}\mathrm{d}\,\tau; \tag{4.58}$$

$$\upsilon(\tau) = \frac{L}{\Delta P}\int_0^{\tau}\dot{\gamma}(\tau)\mathrm{d}\,\tau; \tag{4.59}$$

$$Q = 2\int_0^{\tau_w}\upsilon(\tau)\mathrm{d}\,x = 2\int_0^{\tau_w}\upsilon(\tau)\frac{L}{\Delta p}\mathrm{d}\,\tau = 2\frac{L^2}{\Delta p^2}\int_0^{\tau_w}\int_0^{\tau}\dot{\gamma}(\tau)\mathrm{d}\,\tau\,\mathrm{d}\,\tau \tag{4.60}$$

4.5 Течение пищевых сред в трубах прямоугольного сечения

Предполагается, что среда обладает линейной вязкостью, несжимаема, процесс изотермический и ламинарный.

Уравнение движения в проекциях на ось *Z* имеет вид (рис. 4.5)

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z. \tag{4.61}$$

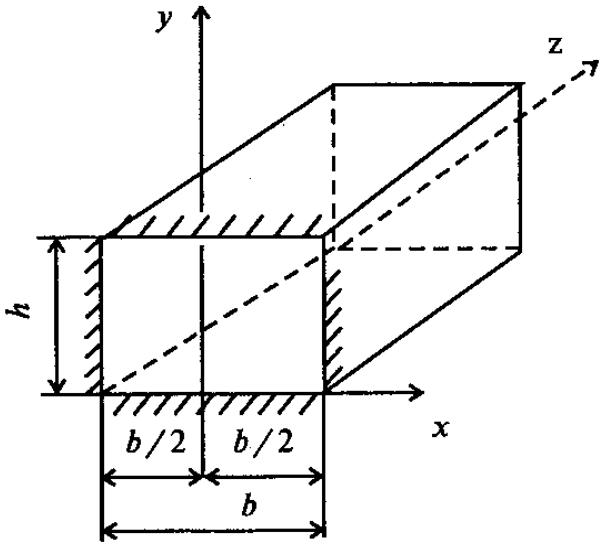


Рис. 4.5 – Расчетная схема прямоугольной трубы

Реологические уравнения ньютоновской жидкости в прямоугольных координатах имеют вид:

$$\tau_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right); \tag{4.62}$$

$$\tau_{yz} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right); \tag{4.63}$$

$$\tau_{zz} = \eta\left[\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] + \chi\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \tag{4.64}$$

где τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zz} - компоненты тензора касательных напряжений (девиатора тензора напряжений); χ - коэффициент объемной вязкости (здесь равен 0).

Подставим уравнения (4.62)–(4.64) в уравнение (4.61) и произведем следующие упрощения. В силу стационарности потока $\partial v_z / \partial t = 0$, в плоскопараллельной модели канала $v_x = v_y = 0$; геометрия канала по оси Z не меняется, откуда $\partial v_z / \partial z = 0$; жидкость несжимаема, следовательно, $\chi = 0$; p = const; канал горизонтальный, поэтому $g_z = 0$.

С учетом названных упрощений получим дифференциальное уравнение движения, известное в математической физике как уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \tag{4.65}$$

с краевыми условиями:

$$v_z(x,0) = 0;\ v_z(x,h) = 0;\ v_z\left(\pm\frac{b}{2}, y\right) = 0. \tag{4.66}$$

Решение краевой задачи (4.65) и (4.66) ищем в виде суммы функций

$$v_z(x,y) = v_{z1}(x,y) + v_{z2}(y), \tag{4.67}$$

откуда

$$\frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \tag{4.68}$$

и

$$\frac{d^2 v_{z2}}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right); \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial y^2} = 0. \tag{4.70}$$

Интегрируя, получим

$$v_{z2} = \frac{y^2}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + C_1 y + C_2; \tag{4.71}$$

$$C_1 = -\frac{h}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right);\ C_2 = 0; \tag{4.72}$$

$$v_{z2} = \frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(y - h); \tag{4.73}$$

$$v_{z1}(x,0) = v_{z1}(x,h) = 0;$$

$$v_{z1}\left(\pm\frac{b}{2}, y\right) = \frac{y^2}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(h - y). \tag{4.74}$$

Пусть

$$v_{z1}(x,y)=X(x)Y(y), \tag{4.75}$$

тогда из уравнения (4.70) получим

$$Y(y)\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+X(x)\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=0. \tag{4.76}$$

Поскольку (4.76) должно быть удовлетворено при любых x и y, можно записать следующее тождество:

$$-\frac{\left[\mathrm{d}^2X(x)\right]/\mathrm{d}x^2}{X(x)}\equiv\frac{\left[\mathrm{d}^2Y(y)\right]/\mathrm{d}y^2}{Y(y)}=-k, \tag{4.77}$$

где k - некоторая константа, $k > 0$.

Из выражения (4.77) получим два однородных линейных дифференциальных уравнения в обычных производных

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}-kX(x)=0; \tag{4.78}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+kY(y)=0. \tag{4.79}$$

Для уравнения (4.79) из краевых условий (4.74) получим краевые условия

$$v_{z1}(x,0)=0,\ Y(0)=0;\ v_{z1}(x,h)=0,\ Y(h)=0. \tag{4.80}$$

Отбросив тривиальное решение уравнения (4.79)

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=Y(y)=0, \tag{4.81}$$

ищем решение уравнения (4.79) в виде экспоненциальной функции:

$$Y(y)=\mathrm{e}^{\lambda y};\ \frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda y}. \tag{4.82}$$

Далее находим характеристическое уравнение, имеющее комплексные корни, и с помощью уравнений Эйлера переходим к обычным тригонометрическим функциям:

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda y}+k\mathrm{e}^{\lambda y}=0;\ \mathrm{e}^{\lambda y}\neq0;\ \lambda^2+k=0;\ \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{ki},\ i=\sqrt{-1} \tag{4.83}$$

$$Y=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{kiy}}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{kiy}};\ C_1=\frac{A}{2}+\frac{B}{2i};\ C_2=\frac{A}{2}-\frac{B}{2i}, \tag{4.84}$$

где C_1, C_2, A, B – константы интегрирования;

$$Y=A\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{kiy}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{kiy}}}{2}\right)+B\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{kiy}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{kiy}}}{2i}\right). \tag{4.85}$$

По уравнениям Эйлера получим:

$$Y=A\cos\sqrt{k}y+B\sin\sqrt{k}y. \tag{4.86}$$

С помощью краевых условий (4.80) находим тривиальное решение ($A = 0$, $B = 0$) и нетривиальное решение (A = 0, $B\sin\sqrt{k}y = 0$). В нетривиальном решении последнее выражение можно удовлетворить следующим образом:

$$\sin\sqrt{k}h = 0;\ \sqrt{k}h = n\pi,\ n = 1,\ \ 2,\ \ 3... \tag{4.87}$$

Тогда

$$k_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2;\ Y_n(y) = B_n \sin\frac{n\pi}{h}y. \tag{4.88}$$

Дифференциальное уравнение (4.78) превращается в систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - k_n X_n(x) = 0 \tag{4.89}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 X_n(x) = 0 \tag{4.90}$$

Решение уравнения (4.90) аналогично решению уравнения (4.88), однако, из-за знака «минус» решение по формулам Эйлера представляется в гиперболических синусах и косинусах:

$$X_n(x) = D'_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{h} + E'_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{h}. \tag{4.91}$$

С учетом выражений (4.75), (4.88) и (4.91) запишем

$$v_{z1n} = X_n(x)Y_n(y) = B_n \sin\frac{n\pi x}{h}\left(D'_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{h} + E'_n \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{4.92}$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение будет суммой частных решений:

$$v_{z1}(x,y) = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin\frac{n\pi y}{h}\left(D_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{h} + E_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{h}\right); \tag{4.93}$$

$$v_z(x,y) = v_{z1}(x,y) + v_{z2}(y) =$$

$$= \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin\frac{n\pi y}{h}\left(D_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{h} + E_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{h}\right) + \frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(y-h). \tag{4.94}$$

На основании краевых условий (4.66) запишем систему уравнений для нахождения констант интегрирования:

$$v_z\left(\pm\frac{b}{2}, y\right) = 0; \tag{4.95}$$

$$0 = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin\frac{n\pi y}{h}\left(D_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2h} + E_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2h}\right) + \frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(y-h); \tag{4.96}$$

$$0 = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin\frac{n\pi y}{h}\left(D_n \mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2h} - E_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi b}{2h}\right) + \frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(y-h). \qquad (4.97)$$

Из разности уравнений (4.96) и (4.97) получим

$$0 = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin\frac{n\pi y}{h}\left(2E_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi b}{2h}\right),\ E_n = 0. \qquad (4.98)$$

Из суммы уравнений (4.96) и (4.97) получим

$$\frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(h-y) = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} D_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2h}\sin\frac{n\pi y}{h}. \qquad (4.99)$$

Далее используем ряд Фурье:

$$S(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^m \alpha_n \sin\, n\omega y + \sum_1^m \beta_n \cos n\omega y, \qquad (4.100)$$

где коэффициенты ряда определяются интегралами

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(y)\sin\, n\omega y\,\mathrm{d}\,y; \qquad (4.101)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(y)\cos n\omega y\ \ \mathrm{d}\,y. \qquad (4.102)$$

Тогда применительно к выражению (4.99) получим

$$\alpha_n = D_n ch\frac{n\pi b}{2h}; \qquad (4.103)$$

$$D_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2h} = \frac{2}{h}\int_0^h \frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(h-y)\sin\frac{n\pi y}{h}\,\mathrm{d}\,y. \qquad (4.104)$$

Проведем интегрирование по частям, используя три табличных интеграла:

$$\int y\sin\, ay\,\mathrm{d}\,y = -\frac{1}{a}y\cos ay + \frac{1}{a^2}\sin\, ay; \qquad (4.105)$$

$$\int y\cos ay\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{a}y\sin\, ay - \frac{1}{a^2}\cos ay; \qquad (4.106)$$

$$\int y^2\sin\, ay\,\mathrm{d}\,y = -\frac{1}{a}y^2\cos ay + \frac{2}{a}\int y\cos ay\,\mathrm{d}\,y. \qquad (4.107)$$

После преобразований получим

$$D_n = \frac{2h^2}{n^3\pi^3\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{1-\cos n\pi}{\mathrm{ch}(n\pi b/2h)}. \qquad (4.108)$$

Поскольку четные n = 2, 4, 6, … дают тривиальное решение D_n = 0, будем учитывать только нечетные слагаемые n = 1, 3, 5, … , при которых числитель в правой части формулы (4.108) равен двум. Теперь распределение скоростей течения в канале определяется формулой вида

$$v_z(x,y)=\frac{4h^2}{\pi^3\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi y}{h}\frac{\mathrm{ch}(n\pi x/h)}{\mathrm{ch}(n\pi b/2h)}+\frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(y-h) \quad (4.109)$$

Двойным интегрированием получим объемный расход среды при течении в канале прямоугольного сечения, предварительно перенеся начало координат в левый нижний угол сечения канала:

$$Q=\int_0^b\int_0^h v_z(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^b\int_0^h\left[\frac{4h^2}{\pi^3\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi y}{h}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi(2x-b)}{2h}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi b}{2h}\right)}+\frac{y}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(y-h)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (4.110)$$

После преобразований получим формулу расхода

$$Q=\frac{bh^3}{12\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[1-\frac{192h}{\pi^5 b}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}\mathrm{th}\left(\frac{n\pi b}{2h}\right)\right]. \quad (4.111)$$

Формула (4.111) позволяет рассчитать объемный расход жидкости в канале прямоугольного сечения при известных перепадах давления, коэффициенте динамической вязкости и геометрических размерах сечения. Бесконечная сумма в квадратных скобках больших сложностей не создает, поскольку ее расчет легко программируется и данный ряд гиперболических тангенсов быстро сходится.

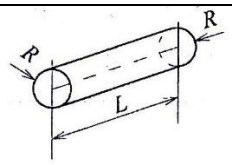
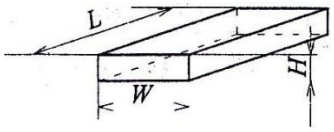
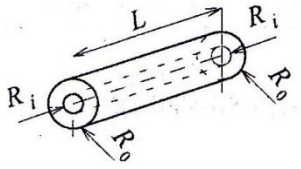
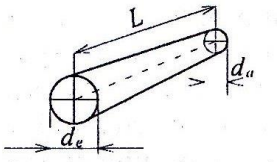
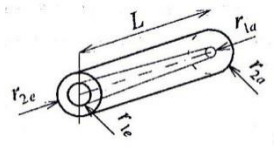
4.6 Течение материалов в различных рабочих каналах пищевых машин и аппаратов

Приведенные в предыдущих разделах пособия формулы расхода можно использовать для сравнительно простых по форме каналов, однако при проектировании машин и аппаратов желательно иметь в распоряжении аналогичные формулы для более сложных по форме каналов. Такие формулы приведены в таблице 4.2.

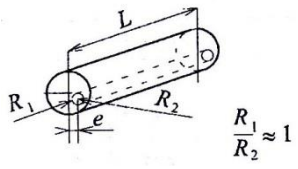
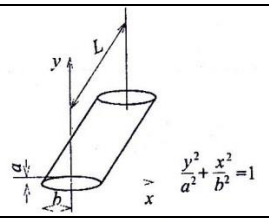
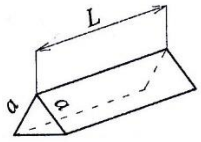
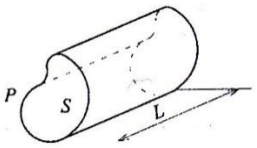
Пользуясь формулами табл. 4.2., можно произвести расчеты течения пищевых сред практически в любых каналах пищевых машин. Следует, однако, признать, что эти расчеты первого приближения к точным моделям, поскольку коэффициент эффективной вязкости в ряде случаев является отдельной реометрической задачей.

Таблица 4.2

Формулы для сложных каналов

№ п/п	Канал	Формула
1	2	3
1		$Q = \dfrac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta_{эф} L}$
2		$Q = \dfrac{WH^3 \Delta p}{12\eta_{эф} L}$
3	Канал №2 $0{,}1 < \dfrac{H}{W} \le 1$	$Q = \dfrac{WH^3}{12\eta_{эф} L}\left(1 - 0{,}578\dfrac{H}{W}\right)\Delta p$
4	Канал №2 $\dfrac{H}{W} > 1$	$Q = \dfrac{WH^3 \Delta p}{12\eta_{эф} L} \times$ $\times\left[1 - \dfrac{192H}{W\pi^5}\sum\limits_{g=1,3,5}^{\infty}\dfrac{1}{g^5}\operatorname{th}\dfrac{g\pi W}{2H}\right]$
5		$Q = \dfrac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta_{эф} L}\left[\dfrac{\beta - 1}{\beta^4} - \left(\dfrac{\beta^2 - 1}{\beta^2}\right)^2 \dfrac{1}{\lg\beta}\right];$ $\beta = \dfrac{R_0}{R_i}$
6		$Q = \dfrac{3\pi d_e^3 d_a^3}{128\eta_{эф} L}\dfrac{d_e - d_a}{d_e^3 - d_a^3}$
7		Формула №6 при: $d_e = r_{1e} + r_{2e};$ $d_a = r_{1a} + r_{2a}$

Продолжение таблицы 4.2

1	2	3
8		$Q = \left(1 + \frac{3e^2}{2b_2^2}\right)\frac{\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{12\eta_{эф}L}b\Delta p;$ $b = R_1 - R_2$
9		$Q = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta p}{4\eta_{эф}L\left(a^2 + b^2\right)}$
10		$Q = \frac{a^4\sqrt{3}\Delta p}{320\eta_{эф}L}$
11		$Q = \frac{S^3\Delta p}{2\eta_{эф}PL},$ где S и P – площадь и периметр поперечного сечения

4.7 Упрощенная линейная теория червячных нагнетателей

В упрощенной линейной теории используется модель движения пищевой среды между параллельными пластинами. Предполагается, что среда обладает линейной вязкостью, несжимаема, процесс перекачки изотермический и ламинарный. Канал винтового насоса схематизируется в виде горизонтального цилиндра, прямоугольного в сечении, с одной подвижной стенкой, при этом используется принцип обращенного относительного движения винта и винтового канала (рис. 4.6). Полагаем также, что внешний диаметр винта и внутренний диаметр винтового цилиндра совпадают, т. е. отсутствует зазор, в котором может быть обратный поток материала. Поток в этом зазоре можно учесть отдельно. Тогда скорость верхней пластины в прямоугольном канале

$$v_z = \frac{\pi D n}{60}\cos\varphi, \qquad (4.112)$$

где v_z - проекция скорости точек винта при $y = h$ на ось Z; D – внешний диаметр винта; n – угловая скорость винта, об/мин; φ - угол подъема винтовой линии.

Уравнение движения в проекциях на ось Z имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)= \\ =-\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z \qquad (4.113)$$

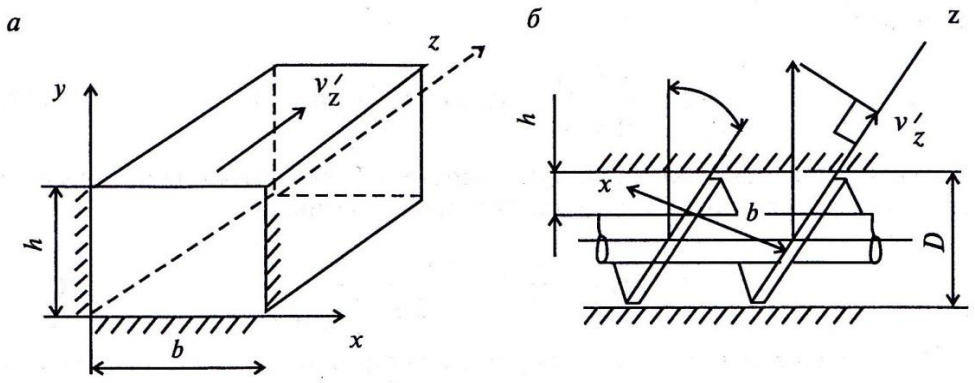


Рис. 4.6 – Расчетная схема червячного нагнетателя:
а – модель развернутого червячного канала;
б – схема действительного червячного канала

Реологические уравнения ньютоновской жидкости в прямоугольных координатах имеют вид

$$\tau_{xz}=\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right); \qquad (4.114)$$

$$\tau_{yz}=\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right); \qquad (4.115)$$

$$\tau_{zz}=\eta\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]+\chi\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \qquad (4.116)$$

где τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zz} – компоненты тензора касательных напряжений (девиатора тензора напряжений); χ - коэффициент объемной вязкости (здесь равен 0).

Подставим выражения (4.114)–(4.116) в уравнение (4.113) и произведем следующие упрощения. В силу стационарности потока $\partial v_Z/\partial t=0$, в плоскопараллельной модели канала $v_x = v_y = 0$; геометрия канала по оси Z не меняется, откуда $\partial v_Z/\partial z=0$; жидкость несжимаема, следовательно, $\chi = 0$; p = const; канал горизонтальный, поэтому $g_z = 0$. С учетом названных упрощений получим дифференциальное уравнение движения для построения теории червячных нагнетателей:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}=\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (4.117)$$

Пусть для неглубоких и широких каналов скорость течения мало зависит от координаты x, тогда уравнение (4.117) еще больше упрощается, и получаем краевую задачу вида

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right);\ v_z(0) = 0;\ v_z(h) = v'_z. \qquad (4.118)$$

Решая эту краевую задачу, получим выражение для распределения скоростей течения среды в винтовом канале как функцию координаты *y*:

$$v_z(y) = y\left(\frac{v'_z}{h}\right) - \frac{yh - y^2}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (4.119)$$

Интегрированием получим формулу для построения расходно-напорной характеристики червячного нагнетателя:

$$Q = b\int_0^h v_z(y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{v'_z bh}{2} - \frac{bh^3}{12\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (4.120)$$

Разумеется, при выводе формул (4.119) и (4.120) были сделаны существенные упрощения, однако основные закономерности червячных нагнетателей и нагнетателей червячных экструдеров в пищевой промышленности эти зависимости описывают вполне удовлетворительно, особенно, если вместо коэффициента динамической вязкости модели ньютоновской жидкости используется коэффициент эффективной вязкости для неньютоновской пищевой среды при определенной эффективной скорости сдвига.

Для уточненной теории винтовых нагнетателей с глубокими каналами следует учесть тормозящее действие боковых стенок винтового канала и в краевой задаче вместо дифференциального уравнения (4.118) использовать уравнение (4.120). Тогда математически задача решения краевой задачи с дифференциальным уравнением в частных производных (4.117) сводится к задаче Буссинеска, которая описывает не только течение жидкости в цилиндрическом канале прямоугольного сечения, но и кручение бруса прямоугольного сечения в теории упругости. Эта частная задача демонстрирует глубокую аналогию между математическим аппаратом гидродинамики и теории упругости, обусловленную сходством дифференциальных уравнений и линейностью законов упругости Гука и вязкости Ньютона.

4.8 Расчет червячных экструдеров по методу совмещенных расходно-напорных характеристик

Пусть на экструдере формуется жгут круглого сечения. Тогда систему «червячный нагнетатель – матрица» можно рассматривать как систему «генератор массы – потребитель массы» и найти рабочую объемную производительность и давление в предматричной камере по совмещению напорно-расходных характеристик нагнетателя и матрицы. Математически это означает совместное

решение, например, уравнения производительности червячного нагнетателя (4.121) и уравнения Пуазейля:

$$Q = \frac{v'_z bh}{2} - \frac{bh^3}{12\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right); \tag{4.121}$$

$$Q = \frac{\pi R^2 \Delta p}{8L\eta}. \tag{4.122}$$

Полагая падение давления в канале червяка линейным, запишем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial p \sin\varphi}{L_ч}, \tag{4.123}$$

где $L_ч$ - длина червяка; φ - угол подъема винтовой линии червяка.
Решая совместно уравнения (4.121), (4.122) и (4.123), получаем

$$\Delta p = \frac{12\eta v'_z bhLL_ч}{2bh^3 L\sin\varphi + 3\pi R^2 L_ч} \tag{4.124}$$

и

$$Q = \frac{\pi R^2}{2L\eta}\left(\frac{3\eta v'_z bhLL_ч}{2bh^3 L\sin\varphi + 3\pi R^2 L_ч}\right), \tag{4.125}$$

т.е. давление в предматричной камере и объемную производительность экструдера.

4.9 Сопротивление движению лопасти смесительного агрегата

Рассмотрим задачу (рис. 4.8), полагая наклон верхней пластины (лопасть мешалки) незначительным и задавая в случае обращенного движения скорость перемещения нижней горизонтальной пластины в отрицательном направлении оси x.

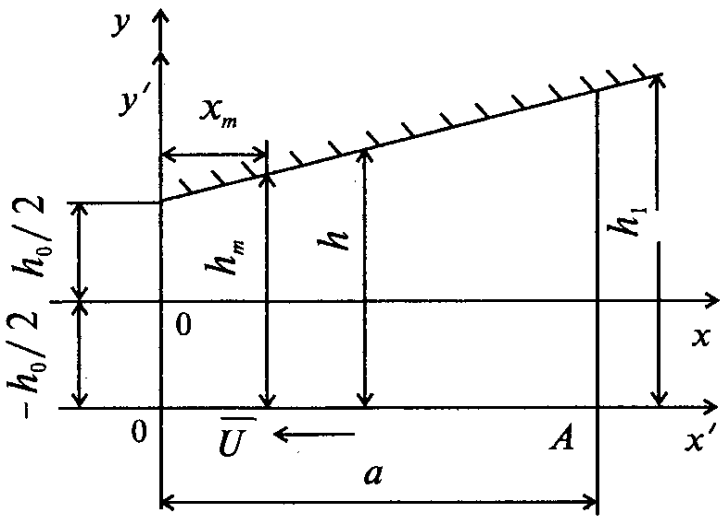


Рис. 4.8 – Схема обращенного движения лопасти

В общем виде проекция уравнения движения на ось x имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)= \\ =-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x \quad , \tag{4.126}$$

где ρ - плотность; t - время; v_x, v_y, v_z - проекции скорости частицы жидкости на оси x, y, z; p - давление; τ_{xx}, τ_{yx}, τ_{zx} - касательные напряжения на площадках, перпендикулярных первому индексу в направлении второго индекса; g_x - проекция ускорения свободного падения на ось x.

В силу горизонтальности оси x $g_x = 0$. Пусть поток стационарный, тогда $\partial v_x/\partial t = 0$; из-за малого наклона верхней пластины и ламинарности потока $\partial v_x/\partial x = 0$. Полагаем, что компоненты скорости по осям y и z отсутствуют ($v_z = v_y = 0$). Полагаем также, что напряжения сдвига не меняются в направлениях x и z $\left(\partial \tau_{xx}/\partial x = \partial \tau_{zx}/\partial z = 0\right)$. Тогда напряжение сдвига τ_{yx} будет функцией координаты y и, опуская индексы при напряжениях, получим из (4.126) уравнение движения равновесия вида

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.127}$$

или, приняв

$$\tau(y)=\tau_1(y)+\tau_2(y), \tag{4.128}$$

$$\frac{d\tau_1}{dy}+\frac{d\tau_2}{dy}=\frac{dp}{dx};\ \frac{d\tau_1}{dy}=\frac{dp}{dx};\ \frac{d\tau_2}{dy}=0. \tag{4.129}$$

Физически это означает разбиение задачи на две: течение между неподвижными пластинами под действием перепада давлений внутри участка a и течение под действием движения нижней пластины при отсутствии перепада давлений.

Пусть жидкость подчиняется степенному закону

$$\eta=\eta_0\left|\frac{\dot\gamma}{\dot\gamma_0}\right|^{n-1}=\eta_0\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|^{\frac{n-1}{n}}, \tag{4.130}$$

где η - коэффициент динамической вязкости; $\dot\gamma$ - скорость сдвига, здесь dv_x/dy; τ_0, $\dot\gamma_0$ - напряжение сдвига и скорость сдвига при произвольно выбранном приведенном состоянии течения (обычно принимают $\dot\gamma_0$ =1 c^{-1}); η_0 - коэффициент динамической вязкости при скорости сдвига $\dot\gamma_0$; n - реологическая константа жидкости (индекс течения).

Часто реологический степенной закон представляют в виде

$$\tau = k\dot{\gamma}^n, \tag{4.131}$$

где k - реологическая константа жидкости, коэффициент консистенции.

Сравнение формул (4.130) и (4.131) дает

$$k = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}_0^n}. \tag{4.132}$$

Интегрируя уравнение (4.129) для τ_1, получим

$$\tau_1 = \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} y + C_1. \tag{4.133}$$

В силу симметрии потока при y = 0, $\tau_1 = 0$ и $C_1 = 0$.

Реологическое уравнение можно записать в виде

$$\tau_1 = \eta \frac{\mathrm{d}\,v_{x_1}}{\mathrm{d}\,y} = \eta\dot{\gamma}. \tag{4.134}$$

Приняв $\dot{\gamma}_0 = 1$ и используя закон (4.130), получим

$$\tau_1 = \eta_0 \left(\frac{\mathrm{d}\,v_{x_1}}{\mathrm{d}\,y} \right)^n. \tag{4.135}$$

Тогда из выражений (4.133) и (4.135) получим

$$dv_{x_1} = \left(\frac{1}{\eta_0} \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}\,y \tag{4.136}$$

и

$$v_{x_1} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{\eta_0} \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{n+1}{n}} + C_2. \tag{4.137}$$

По условию прилипаемости жидкости к неподвижным стенкам канала запишем

$$y = \pm \frac{h}{2};\ v_{x_1} = 0. \tag{4.138}$$

Определив по условиям (4.138) константу интегрирования C_2, запишем

$$v_{x_1} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{\eta_0} \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \right)^{\frac{1}{n}} \left[|y|^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \tag{4.139}$$

или, в силу равенства $y = y' - h/2$,

$$v_{x_1} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{\eta_0} \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left| y' - \frac{h}{2} \right|^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \tag{4.140}$$

Проведем преобразование и интегрирование для потока под действием движения нижней пластины:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_2}{\mathrm{d}y}=0;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\eta\frac{\mathrm{d}v_{x_2}}{\mathrm{d}y}\right)=0;\ \eta\frac{\mathrm{d}v_{x_2}}{\mathrm{d}y}=C_3; \tag{4.141}$$

$$\eta_0\left(\frac{\mathrm{d}v_{x_2}}{\mathrm{d}y}\right)^n=C_3;\ \frac{\mathrm{d}v_{x_2}}{\mathrm{d}y}=\left(\frac{C_3}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}=C_4;\ v_{x_2}=C_4y+C_5.$$

Запишем краевые условия и определим константы интегрирования C_4 и C_5:

$$v_{x_2}=\left(-\frac{h}{2}\right)=-u;\ v_{x_2}\left(\frac{h}{2}\right)=0;\ -u=-C_4\frac{h}{2}+C_5; \tag{4.142}$$

$$0=C_4\frac{h}{2}+C_5;\ C_5=-\frac{u}{2};\ C_4=\frac{u}{h}.$$

Тогда при $y=y'-h/2$

$$v_x=-\frac{u}{h}(h-y') \tag{4.143}$$

По принципу аддитивности решений получим

$$v_x=v_{x_1}+v_{x_2}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{\eta_0}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\left|y'-\frac{h}{2}\right|^{\frac{n+1}{n}}-\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]-\frac{u}{h}(h-y'). \tag{4.144}$$

Продолжим решение в линейной постановке аналогичной задаче Рейнольдса-Релея.

При n=1 получим из выражения (4.144)

$$v_x=\frac{1}{2\eta_0}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[\left|y'^2-y'h\right|-\frac{u}{h}(h-y')\right]. \tag{4.145}$$

Полагая расход через любое поперечное сечение щели постоянным, запишем

$$\int_0^h v_x\,\mathrm{d}y'=C_6. \tag{4.146}$$

Подставив скорость v_x по формуле (4.145) в (4.146) и проведя интегрирование, получим

$$\frac{h^3}{6\eta_0}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+uh=C_6. \tag{4.147}$$

На участке $x = 0 \div a$ в некоторой точке x_m выполняется условие $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x=0$.

Пусть значению x_m соответствует ширина щели h_m, тогда из выражения (4.147) следует $C_6 = U_{hm}$ и можно записать зависимость (4.147) в виде

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{6\eta_0u}{h^3}(h-h_m). \tag{4.148}$$

Из геометрических соображений (см. рис. 4.8) свяжем переменные x и h:

$$h = h_0\left(1 + k\frac{x}{a}\right). \tag{4.149}$$

Тогда левую часть уравнения (4.148) можно преобразовать так:

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,x} = k\frac{h_0}{a}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,h}. \tag{4.150}$$

Подставив выражения (4.150) в (4.148) и разделив переменные, получим

$$\mathrm{d}\,p = -\frac{6\eta_0 u a}{k h_0}\left(h^{-2} - h_m h^{-3}\right)\mathrm{d}\,h; \tag{4.151}$$

$$p = -\frac{6\eta_0 u a}{k h_0}\left(-h^{-1} + \frac{h_m}{2}h^{-2}\right) + C_7. \tag{4.152}$$

Полагая, что давление вне зазора равно p_0, запишем условия p = p_0 при $h \le h_0$ и $h \ge h_1 = h_0(1 + k)$. (4.153)

Условия (4.153) и выражение (4.152) дают систему уравнений для нахождения констант h_m и C_7:

$$p_0 = \frac{6\eta_0 u a}{k h_0}\left(\frac{1}{h_0} - \frac{h_m}{2h_0^2}\right) + C_7; \tag{4.154}$$

$$p_0 = \frac{6\eta_0 u a}{k h_0}\left(\frac{1}{h_0(1+k)} - \frac{h_m}{2h_0^2(1+k)^2}\right).$$

Решая систему (4.154) и опуская выкладки, получим

$$h_m = 2h_0\frac{1+k}{2+k} \tag{4.155}$$

и

$$C_7 = p_0 - \frac{6\eta_0 u a}{k h_0^2}\left(\frac{1}{2+k}\right). \tag{4.156}$$

Подставляя значения констант h_m и C_7 по формулам (4.155) и (4.156) в формулу (4.152), получим

$$p(h) = p_0 + \frac{6\eta_0 u a}{k h_0^2}\left[\frac{h_0}{h} - \frac{1}{2+k} - \left(\frac{h_0}{h}\right)^2\frac{1+k}{2+k}\right]. \tag{4.157}$$

В силу уравнения (4.149) между переменными h и x получим

$$\frac{h_0}{h} = \frac{a}{a + kx} \tag{4.158}$$

и из формулы (4.157) получим распределение давления потока на пластину:

$$p(x) = p_0 + \frac{6\eta_0 ua}{kh_0^2}\left[\frac{a}{a+kx} - \frac{1}{2+k} - \left(\frac{1+k}{2+k}\right)\frac{a^2}{(a+kx)^2}\right]. \quad (4.159)$$

Теперь можно рассмотреть подъемную силу R, действующую на пластину:

$$R = \int_0^a (p - p_0)\,\mathrm{d}x = \frac{6\eta_0 ua}{kh_0^2}\int_0^a\left[\frac{a}{a+kx} - \frac{1}{2+k} - \left(\frac{1+k}{2+k}\right)\frac{a^2}{(a+kx)^2}\right]. \quad (4.160)$$

В результате интегрирования

$$R = \frac{6\eta_0 Ua^2}{k^2 h_0^2}\left[\ln(1+k) - \frac{2k}{2+k}\right]. \quad (4.161)$$

Эта нелинейная функция от переменной K имеет максимум. Для отыскания величины K для $R_{\max}$ проведем дифференцирование выражения (4.161) по K и приравняем производную к нулю:

$$\frac{dR}{dk} = \frac{6\eta_0 Ua^2}{h_0^2}\left[\frac{2}{K^2(2+K)} + \frac{2}{K(2+K)^2} + \frac{1}{(1+K)K^2} - \frac{2\ln(1+K)}{K^3}\right] = 0. \quad (4.162)$$

Решение уравнения (4.162) дает значение $K \approx 1{,}188$. Анализ функции (4.160) и уравнения (4.161) удобно производить при помощи программы *MathCad*, расчеты и графики по которой приведены ниже.

Запишем функцию подъемной силы R с точностью до постоянного множителя, где $K = x$:

$$\mathrm{f}(x) = \left[\frac{-2}{x(2+x)}\right] + \frac{\ln(1+x)}{x^2}. \quad (4.163)$$

Программа *MachCad* позволяет получить график функции f(x) – рис. 4.9. Очевидно, график имеет экстремум в области $x = 1$. Для уточнения аргумента x возьмем производную из выражения (4.163):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(x) \to \left[\frac{2}{x^2(2+x)}\right] + \left[\frac{2}{x(2+x)^2}\right] + \left[\frac{1}{(1+x)x^2}\right] - 2\frac{\ln(1+x)}{x^3} \quad (4.164)$$

и решим эту задачу, приравняв эту производную к нулю:

$$\mathrm{f}_1(x) = \left[\frac{2}{x^2(2+x)}\right] + \left[\frac{2}{x(2+x)^2}\right] + \left[\frac{1}{(1+x)x^2}\right] - 2\frac{\ln(1+x)}{x^3}; \quad (4.165)$$

$$\mathrm{f}_2(x) = 0. \quad (4.166)$$

Решение системы (4.165), (4.166) можно представить графически (рис. 4.10).

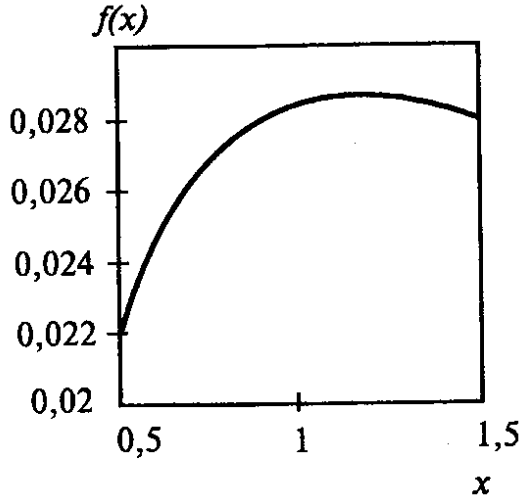


Рис. 4.9 – График функции по уравнению (4.163)

Из сказанного следует, что R_{max} имеет место при $K \approx 1{,}188$ или при соотношении $h_1/h_2 = 2{,}188$. Тогда максимальная подъемная сила выражается формулой вида

$$R_{\max} = 0{,}16\frac{\eta_0 U a^2}{h_0^2}. \qquad (4.166)$$

Ввиду малости наклона верхней пластины примем касательные напряжения на нижней пластине, удовлетворяющие выражению

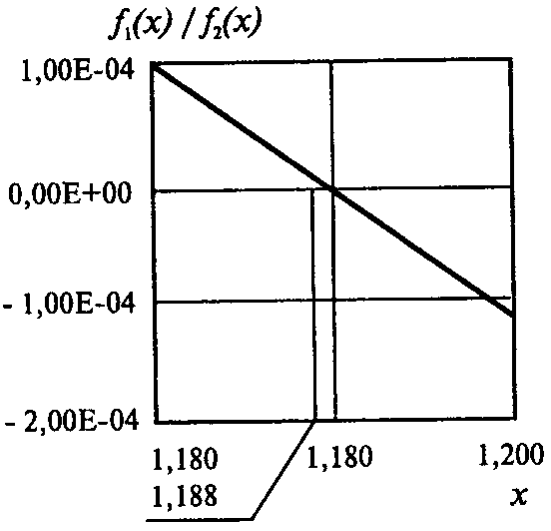


Рис. 4.10 – Графическое решение поиска точки приложения максимальной подъемной силы

$$\tau = \eta_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y'=0}. \qquad (4.167)$$

Взяв производную по y' из выражения (4.145), получим

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y'}\right)_{y'=0} = -\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} + \frac{U}{h}. \qquad (4.168)$$

Подставим выражение (4.168) в правую часть формулы (4.167):

$$\tau = -\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} + \frac{\eta_0 U}{h}. \qquad (4.169)$$

Используя формулы (4.148), (4.149) и (4.155), подставим в правую часть формулы (4.169) выражения dp/dx, h и h_m; после несложных алгебраических выкладок получим формулу вида

$$\tau = \frac{\eta_0 U}{h_0}\left[\frac{4a}{a+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k}\frac{a^2}{(a+kx)^2}\right]. \qquad (4.170)$$

Силу сопротивления получим в результате интегрирования выражения (4.170):

$$F = \frac{\eta_0 U}{h_0}\int_0^a\left[\frac{4a}{a+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k}\frac{a^2}{(a+kx)^2}\right]\mathrm{d}\,x; \qquad (4.171)$$

$$F_{\max}\Big|_{k=1{,}188} = 0{,}754\frac{\eta_0 a U}{h_0}. \qquad (4.172)$$

Формулы (4.166) и (4.172) позволяют рассчитать максимальную подъемную силу и силу сопротивления при значениях, например, h_1/h_0 = 2,188; a = 0,2 м; $h = 10^{-4}$ м; U = 0,3 м/с; $h_0 = 10^{-1}$ Па·с.

С помощью программы *MathCad* получены величины

$$F_{\max} = 45{,}256 \text{ Н};\ R_{\max} = 1{,}92\cdot 10^4 \text{ Н} \qquad (4.173)$$

Для прочностного расчета крепления лопасти мешалки вычислим точку приложения равнодействующей силы сопротивления движению. Составим выражение для момента равнодействующей M_c:

$$M_C = \int_0^h (p - p_0)x\,\mathrm{d}\,x = \frac{6\eta_0 U a^3}{2h_0^2 k^3(2+k)}\left[6k + k^2 - 2(3+2k)\ln(1+k)\right];$$

$$x_R = \frac{M_C}{R} = \frac{6k + k^2 - 2(3+2k)\ln(1+k)}{2k\left[(2+k)\ln(1+k) - 2k\right]}. \qquad (4.174)$$

При k = 1,2 $x_R \approx 0{,}42a$.

Контрольные вопросы

1. Из каких слагаемых состоит полный суммарный расход с учетом явления проскальзывания потока на стенке трубы круглого сечения?
2. Нарисуйте и поясните расчетную схему щелевого канала.
3. Нарисуйте и поясните эпюры скоростей течения и касательных напряжений в щелевом канале.
4. Какими особенностями обладает ламинарное течение среды Оствальда Де Виля (степенной жидкости) в щелевом канале?
5. В каких рабочих органах машин имеет место течение пищевых сред в трубах прямоугольного сечения?
6. Нарисуйте и поясните расчетную схему прямоугольной трубы.
7. Напишите и поясните дифференциальное уравнение движения, известное в математической физике как уравнение Пуассона.
8. Известность каких параметров позволяет рассчитать объемный расход жидкости в канале прямоугольного сечения?
9. Нарисуйте и поясните расчетную схему червячного нагнетателя.
10. В чем сущность расчета объемной производительности и давления в предматричной камере по совмещению напорно-расходных характеристик нагнетателя и матрицы?
11. Нарисуйте и поясните расчетную схему обращенного движения лопасти.
12. Напишите и поясните функцию подъемной силы для лопасти. Как выглядит ее график?

Глава 5 ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

5.1 Прочность твердых тел

Основными параметрами твердых тел являются – в первую очередь – их геометрические размеры, форма и плотность сред, из которых они состоят. Но с точки зрения технологической переработки важнейшим параметром является прочность, которая проявляется при деформировании тела.

Под *прочностью* понимают способность среды тела сохранять свою неразрывность в процессе деформации при нагружении тела. Теоретической прочности соответствует напряжение, которое можно вычислить по формуле Орована:

$$\sigma_{th} \approx \sqrt{E\gamma / a_0}, \tag{5.1}$$

где σ_{th}– теоретический предел прочности; E – модуль упругости материала; γ– суммарная энергия двух образованных поверхностей; a_0 – расстояние, на котором действуют силы межмолекулярного взаимодействия в теле.

Оценивать прочность тела выражением (5.1) возможно лишь в том случае, если тело обладает идеальной кристаллической структурой, причем полностью отсутствуют какие-либо ее дефекты, что не наблюдается в реальных природных объектах.

Теоретически *реальная прочность* может быть определена из экспоненциальной зависимости, полученной С. Н. Журковым:

$$\tau(\sigma, T) = \tau_0 \exp\left(\frac{U_0 - \beta\sigma}{kT}\right), \tag{5.2}$$

где τ – время от начала нагружения тела до его разрушения; σ – напряжение в теле; T – абсолютная температура; $\tau_0 \approx 10^{-13}$ с – время, по порядку величины близкое к периоду колебаний молекул в твердых телах (период колебаний максимальной частоты в дебаевском спектре); U_0 – энергия активации процесса разрушения (энергия диссоциации вещества); β – коэффициент, учитывающий структуру тела, неравномерность локальных напряжений в нем; $\beta = qV_a$, где V_a – активационный объем в элементарном акте диссоциации; q – коэффициент локальных перенапряжений (достигает значений 10–100 и выше в реальных телах); k – постоянная Больцмана (k = (1,380658 ± 0.000012) 10^{-23} Дж/К)

Разрушение тела представляет собой необратимое разделение тела на части при подводе внешней энергии, сопровождающееся образованием новой поверхности, преодоление прочности тела.

В зависимости от распределения напряжений в теле разрушение бывает двух типов: отрывом и сдвигом (скольжением).

Разрушение отрывом является хрупким и возникает в результате приложения растягивающих нагрузок либо при возникновении в теле напряжений растяжения; поверхность разрушения нормальна к максимальному главному напряжению.

Разрушение сдвигом (скольжением) является вязким, связано с касательными напряжениями и проходит по направлению максимального сдвига, поверхность которого ориентирована под углом 45° к главным напряжениям.

На разрушение влияет форма тела, тип нагрузки, температура, скорость деформации и механические свойства среды. Форма тела и нагрузка определяет поле напряжений; нарушение условия прочности отражается на распределении напряжений в теле, а также на степени влияния напряженного состояния на механические свойства среды. Концентраторы напряжений действуют как точки начала разрушений и приводят к хрупкому разрушению. Тип разрушения определяется температурой и скоростью нагружения; хрупкое разрушение возникает при низких температурах и резком приложении нагрузки; вязкое разрушение связано с высокими температурами и малыми скоростями нагружения.

Существует связь между температурой T и энергией разрушения U (рисунок (5.1). Участку кривой A–B соответствует хрупкое разрушение, малая необходимая для разрушения энергия, низкая температура; участку C–D – вязкое разрушение, нормальная температура и высокая поглощаемая энергия, которая расходуется на пластическую деформацию, предшествующую началу разрушения; участку B–C – частично хрупкое, частично вязкое разрушение. В этой зоне вполне определенной для каждой среды, энергия разрушения сильно изменяется, что будет показано далее на примере реальных пищевых продуктов.

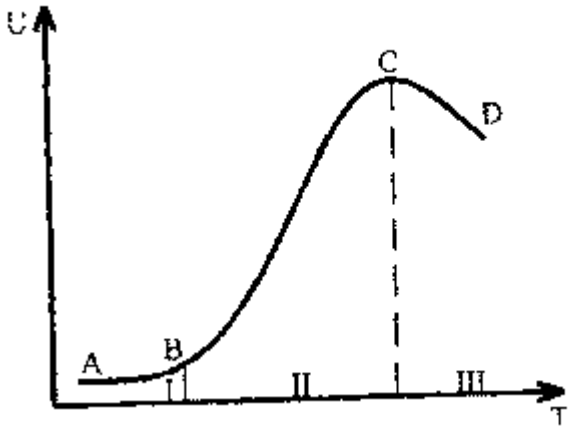


Рис. 5.1 – Зависимость энергии разрушения U от температуры T

При повышении скорости деформации переходная зона сдвигается в сторону более высоких температур, т.е. с ударным нагружением в большей степени связано хрупкое разрушение.

Разрушение твердого тела адекватно описывается теорией Гриффица, развитие которой получило в трудах П.А. Ребиндера. Согласно *условию Гриффица* разрушение происходит, когда при бесконечно малом удлинении трещины выделяется больше упругой энергии, чем это требуется для образования но-

вых поверхностей. Преимущество подхода Гриффица в том, что искомое соотношение получается без детального анализа процесса. Трещина распространяется самопроизвольно под действием приложенной нагрузки только когда общая энергия системы уменьшается. Это указывает на термодинамический характер теории Гриффица. Использование формулы П.А. Ребиндера в расчетах осложнено трудностью определения пластической составляющей энергии деформирования тела.

5.2 Термодинамический подход к прочности

Принято считать, что при деформировании материала в упругой области термодинамическое равновесие при температуре тела, близкой к температуре окружающей среды, сохраняется. Обозначим δQ — количество тепла, отнесенное к единице объема и получаемое упругим телом из окружающей среды; $\sigma\delta\varepsilon$ — работа, совершаемая внешними силами и также отнесенная к единице объема (σ – напряжение, ε – деформация); $\mathrm{d}U$ – внутренняя энергия, отнесенная к единице объема, накапливаемая в упругом теле и изменяемая по первому закону термодинамики. Тогда

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \sigma\delta\varepsilon. \tag{5.3}$$

Отнесенная к единице объема энтропия $\mathrm{d}S$ определяется из второго закона термодинамики

$$\delta Q = T\mathrm{d}S. \tag{5.4}$$

При сопоставлении δQ из выражений (5.3) и (5.4) можно получить уравнение для определения напряжения σ, необходимого для упругой деформации тела

$$\sigma = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_T - T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_T. \tag{5.5}$$

Здесь первый член соответствует увеличению внутренней энергии тела U при увеличении напряжения и деформации, второй связан с изменением энтропии тела S с ростом σ и ε.

Если в уравнении (5.5) второй член приравнять нулю $\left(\mathrm{d}S/\mathrm{d}\varepsilon\right)_T = 0$, то напряжение

$$\sigma = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_T \tag{5.6}$$

будет характеризовать упругость или энергию упругости материала. Это действительно так, поскольку изменение энтропии при изменении упругой деформации у большинства твердых незначительно.

Если в выражении (5.5) приравнять нулю первый член $\left(\mathrm{d}U/\mathrm{d}\varepsilon\right)_T = 0$, то напряжение

$$\sigma = -T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_T \tag{5.7}$$

будет показывать энтропийную упругость материала. Из этого выражения можно определить модуль нормальной упругости материала при изотермической деформации

$$E = -T\left(\mathrm{d}^2 S \Big/ \mathrm{d}\varepsilon^2\right)_T \tag{5.8}$$

Анализ уравнения (5.8) показывает, что модуль упругости существенно зависит от температуры.

5.3 Свойства изотропных твердых тел

Прежде чем перейти к рассмотрению свойств твердых тел, следует дать их определения, несколько отличные от приведенных в первой части пособия.

Упругость – свойство тел восстанавливать свою форму после снятия нагрузки, причем деформации, возникающие в телах, малы. Скорость восстановления прежней формы тела после снятия нагрузки равна скорости изменения самой нагрузки, либо скорости распространения напряжений в данном теле.

Эластичность – разновидность упругости, но со значительно меньшей скоростью восстановления прежней формы и большой величиной деформации. Эластичность характерна для материалов, состоящих из высокомолекулярных соединений, связи между которыми слабее, чем в кристаллических структурах.

Пластичность – разновидность преодоления прочности материала, необратимая деформация, при которой происходит сдвиг в слоях, разрыв некоторых межмолекулярных связей и образование новых. Иначе это необратимое изменение формы тела без образования новой поверхности в среде тела, течение.

Напряжение в твердом теле – внутреннее давление, уравновешивающее воздействие внешних сил, в отличие от жидкостей напряжения в твердых телах никогда не распределяются равномерно.

Остаточное напряжение – напряжение, обусловленное сдвигом во внутренних слоях материалов, когда новые связи только формируются в структуре материала, а старые еще не до конца разрушены.

Релаксация – процесс возвращения к равновесному состоянию среды, выведенной из этого состояния каким–то возмущением; характерное время развития этого процесса называют *временем релаксации***.**

Изотропными являются тела, свойства которых одинаковы в любом направлении действия нагрузки. К упругим изотропным телам относят: сливочное масло при отрицательных температурах, карамель, печенье, ядра орехов и другие. Для них характерны следующие константы: модуль сдвига – G (Па);

модуль объемной упругости – E_v (Па); модуль Юнга, или модуль продольной упругости, – E (Па); коэффициент Пуассона – μ.

Взаимосвязь перечисленных констант определяется следующими соотношениями:

– при одноосном растяжении – сжатии

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= (1/E)\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]\\ \varepsilon_y &= (1/E)\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right]\\ \varepsilon_z &= (1/E)\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]\end{aligned} \qquad (5.9)$$

– при простом сдвиге

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \theta_{xy}/G = 2(1+\mu)\theta_{xy}/E\\ \gamma_{yz} &= \theta_{yz}/G = 2(1+\mu)\theta_{yz}/E\\ \gamma_{zx} &= \theta_{zx}/G = 2(1+\mu)\theta_{zx}/E,\end{aligned} \qquad (5.10)$$

где ε_i – относительная деформация – отношение абсолютной линейной деформации к начальному размеру тела (продукта), соответственно по осям x, y и z; σ_i – нормальное напряжение – напряжение, действующее по нормали к поверхности продукта в тех же координатах; γ_{ij} – относительная деформация (отношение абсолютной сдвиговой деформации к начальному расстоянию между слоями), рассматриваемая в соответствующей плоскости для выбранных объемных координат; θ_{ij} – касательное напряжение, действующее по касательной к поверхности продукта в соответствующей плоскости.

Из теории упругости известно, что по двум константам можно вычислить остальные:

$$G = \frac{E}{1(1+\mu)} = \frac{3EE_V}{9E_V - E} = \frac{3E_V(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \qquad (5.11)$$

$$E_V = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{EG}{9G - 3E} = G\frac{2(1+\mu)}{3(1+2\mu)} \qquad (5.12)$$

$$E = \frac{9GE_V}{3E_V + G} = 2G(1+\mu) = 3E_V(1-2\mu) \qquad (5.13)$$

$$\mu = \frac{E-2G}{2G} = \frac{1 - E/3E_V}{2} = \frac{3E_V - 2G}{2(3E_V + G)} \qquad (5.14)$$

Твердые тела в зависимости от упругости бывают гуковскими и негуковскими. *Гуковское тело* – это идеально упругое тело, состояние которого описывается уравнением Гука

$$\theta = G\gamma, \qquad (5.15)$$

где G – модуль упругости при сдвиге; γ – относительная деформация.

После снятия нагрузки, отдавая накопленную энергию, гуковское тело без запаздывания возвращается в исходное состояние.

Поведение негуковских тел не соответствует поведению идеально упругого тела. Для негуковского твердого тела с нелинейной упругостью полагают

$$\theta/\gamma = G \neq \text{const} \tag{5.16}$$

При этом модуль сдвига является функцией деформации, что характерно, например, для пористых пенообразных пищевых продуктов, в частности, натуральных сыров, мороженого.

По аналогии с неньютоновскими жидкостями вводят понятие эффективного модуля упругости $G_{эф}$. При напряжении, не превышающем предел текучести или прочности твердого тела, соотношение между напряжением сдвига θ и деформацией γ можно описать с помощью эмпирической формулы

$$\theta = G_{эф}\gamma^{m} \tag{5.17}$$

Реологическое поведение простейшего вязкоупругого тела описывают законом Кельвина

$$\theta = G\gamma + \eta(\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}\tau) \tag{5.18}$$

Если приравнять напряжения нулю ($\theta = 0$) и проинтегрировать в пределах от γ_{max} до γ и по времени от 0 до τ , то получим экспоненциальную функцию для релаксации деформации:

$$\gamma = \gamma_{\max}\exp(-G\tau/\eta) \tag{5.19}$$

$$\gamma = \gamma_{\max}\exp(-\tau/T) \tag{5.20}$$

где $T = \eta/G$ – период релаксации напряжений – время, за которое напряжение уменьшаются в e = 2,718 раз.

Если среду нагрузить постоянным напряжением θ при $T > 0$, то

$$\gamma = \frac{\theta_1}{G}\left[1 - \exp(-\tau/T)\right] \tag{5.21}$$

т. е. деформация во времени постепенно увеличивается, стремясь к значению θ_1/G при $\tau\to\infty$. Более подробно явление вязкоупругости рассмотрено в разделе 2.7 пособия.

5.4 Способы преодоления прочности твердых тел

Большинство видов сырья растительного или животного происхождения являются твердыми телами. Твердый материал можно разрушить и измельчить

до частиц желаемого размера раздавливанием, раскалыванием, разламыванием, резанием, распиливанием, истиранием, ударом и различными комбинациями этих способов. Различают разрушение тела стесненным и свободным ударом. При стесненном ударе тело разрушается между двумя рабочими органами измельчителя. Эффект такого разрушения зависит от кинетической энергии ударяющего тела. При свободном ударе разрушение тела наступает в результате столкновения его с рабочим органом измельчителя или другими телами в полете. Эффект такого разрушения определяется скоростью их столкновения, независимо от того, движется разрушаемое тело или рабочий орган измельчителя. Происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную энергию деформации и поверхностную энергию прибавленной площади поверхности материала.

Для промышленной дезинтеграции пригодными являются раскалывание, разламывание, раздавливание, истирание и удар. Раскалывание применяют для получения кусковых материалов, разламывание обычно сопутствует другим способам при крупном, среднем и мелком измельчении, а резание и распиливание применяют в тех случаях, когда нужно получить куски материала определенного размера и заданной формы. В то же время, скользящим резанием достижимо тонкое измельчение и даже коллоидное измельчение вплоть до образования новой дисперсной системы в измельчаемой среде. Истирание применяют для тонкого измельчения мягких и вязких материалов. При этом его всегда комбинируют с раздавливанием или ударом.

Сопоставим способы разрушения и характер воздействия на единичные тела по динамичности и энергоёмкости процесса образования новой поверхности. Схемы процессов разрушения представлены на рисунке 5.2.

Резание и распиливание (рис. 5.2 а, б) вызывают в материале напряжения растяжения, сконцентрированные в плоскости направления движения режущего инструмента. Внедрение рабочего органа в твёрдое тело сопровождается высоким сопротивлением материала, возникающим при упругой и пластической деформации объекта разрушения и трения при внедрении ножа в тело. Распиливание (рис. 5.2 б) является частным случаем резания. В случае динамического приложения нагрузки резание приближается по характеру воздействия на материал к раскалыванию.

Процесс раскалывания (рис. 5.2 в) осуществляется за счёт концентрации нагрузки на малой площади поверхности тела. Разрушение происходит по дефектам структуры тела с образованием опережающей трещины и носит хрупкий характер. При динамическом воздействии раскалывание приобретает свойства стеснённого удара.

При раздавливании (рис. 5.2 г) рабочий элемент воздействует на упругое тело на достаточно большой поверхности, вызывая в нём напряжения. Энергия рабочего органа первоначально преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации, затем происходят сдвиговые деформации по дефектам структуры тела и разрушение. При уменьшении размеров частиц возрастают усилия

разрушения, что объясняется масштабным фактором – уменьшением количества дефектов в теле при сокращении его размера.

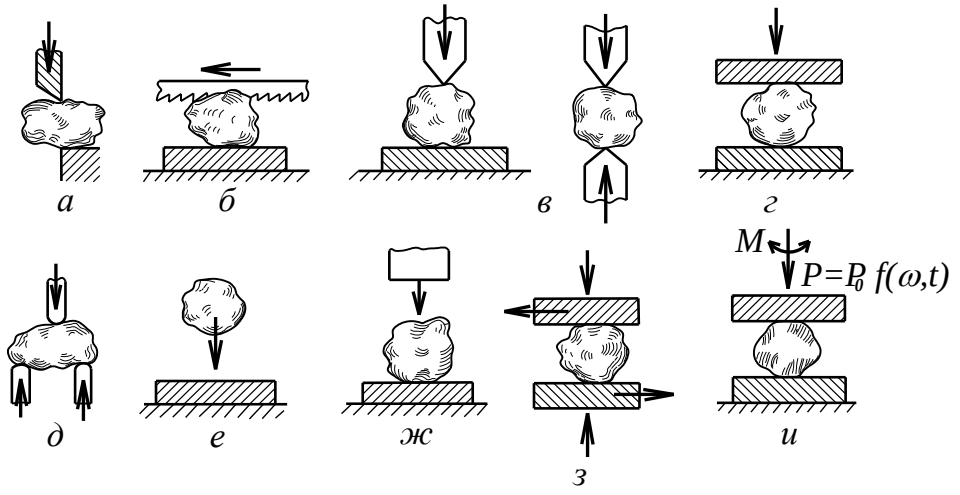


Рис. 5.2 – Способы разрушения единичных твердых тел*:*
а – резание; б – распиливание; в – раскалывание; г – раздавливание;
д – разламывание; е – свободный удар; ж – стеснённый удар;
з – истирание; и – вибрационно-импульсное воздействие

Разламывание (рис. 5.2 д) является частным случаем раскалывания, но отличается от последнего характером распределения нагрузок. Процесс разламывания осуществляется за счёт воздействия изгибающих сил и растягивающих напряжений в большом объёме разрушаемого тела.

Ударные воздействия на разрушаемое тело подразделяются на свободный и стеснённый удары (рис. 5.2 е, ж). При свободном ударе (рис. 5.2 е) разрушение тела наступает в результате его столкновения с рабочим органом или другими телами в полёте. В момент столкновения кинетическая энергия тела и рабочего органа частично преобразуется в потенциальную энергию разрушения. Значительная же её часть тратится на сообщение осколкам тела кинетической энергии, в результате возникает активное перемещение частиц в зоне измельчения. Более выгоден энергетически стеснённый удар (рис. 5.2 е, ж), при котором практически отсутствует затраты энергии на перемещение материала в зоне измельчения. Вся кинетическая энергия рабочего органа преобразуется в потенциальную энергию деформирования и разрушения.

Процесс истирания (рис. 5.2 з) осуществляется под воздействием на материал сил, возникающих за счёт сильного прижатия частиц рабочими поверхностями измельчителя. При этом создаются высокие сдвиговые деформации тел. Основная работа измельчения истиранием осуществляется силами трения между частицами материала и поверхностями рабочих органов. Процесс является наиболее энергоёмким из всех перечисленных, но им достижима высокая степень измельчения.

Вибрационно-импульсное воздействие (рис. 5.2 и) достигается за счёт удара со скольжением дробящего тела по измельчаемому материалу, либо

вследствие удара с некоторым поворотом рабочего органа относительно какой-либо оси. Вибрационное воздействие на измельчаемый материал существенно увеличивает ударно-истирающий эффект, что повышает вероятность разрушения частиц. Особенностью вибрационного измельчения является также возможность широкого и раздельного варьирования ударного (регулирование параметров вибрации) и истирающего факторов (изменение формы колебаний, конструктивного исполнения рабочей камеры и т. д.).

Зачастую в измельчающих машинах один способ естественно трансформируется в другой. Наибольший эффект при разрушении получается совмещением различных способов, что создаёт сложные напряжённые состояния в объектах разрушения, способствующие снижению энергозатрат.

Процессы разрушения, как правило, осуществляются одновременно со множеством тел преимущественно в слое. При традиционной схеме раздавливания (рис. 5.3 а) в результате одноосного нагружения единичного тела или нескольких тел, расположенных монослоем между рабочими органами машины, стартовая трещина образуется в весьма ограниченной зоне внутри тела. Поэтому для разрушения прочных материалов приходится применять машины с жесткой кинематической схемой и массивными деталями, способными выдерживать высокие нагрузки. С целью предотвращения повреждения механизма таких машин деформацию куска доводят лишь до определенного уровня, не превышая заданного значения.

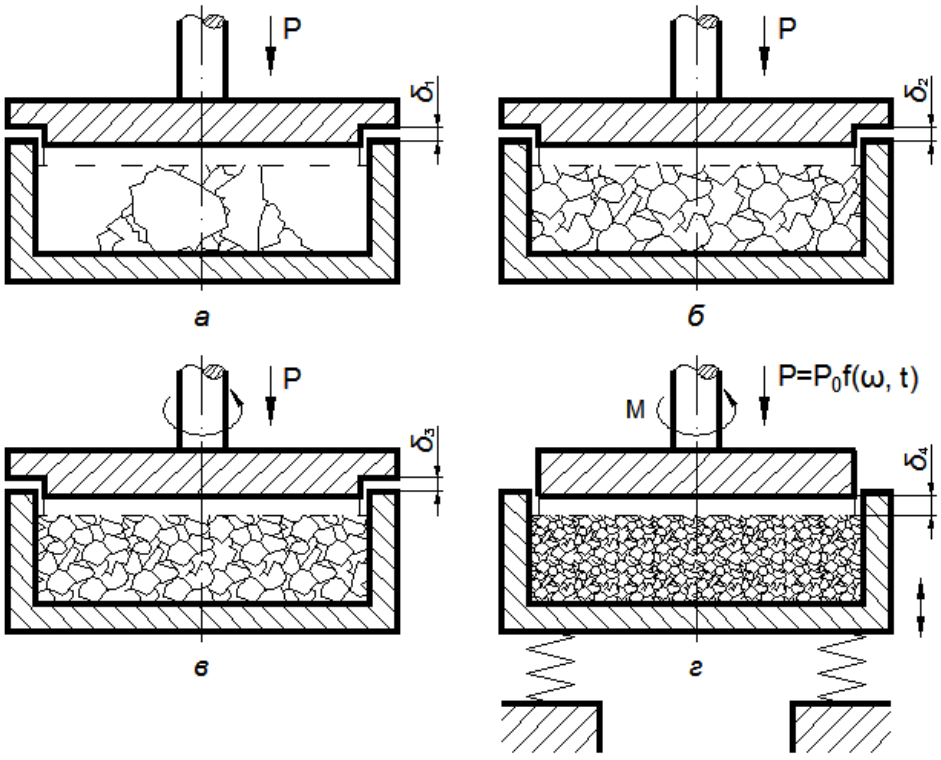


Рис. 5.3 – Схемы различных способов механического разрушения в слое: а) раздавливание; б) раздавливание в слое; в) раздавливание слоя материала сжатием и сдвигом; г) виброинерционный способ разрушения

При деформации слоя частиц одноосным сжатием (рис.5.3 б) происходит откалывание углов и краев от более крупных кусков до тех пор, пока полости в слое не заполнятся обломками. Кроме того, относительно слабые куски разламываются более прочными. Острые грани последних действуют по схеме трехточечного изгиба или клина. Однако в основной массе куски остаются целыми.

В них развиваются сдвиговые напряжения на поверхности раздела фаз с различными прочностными свойствами. Но эта трещиноватость не реализуется в новую поверхность, т.к. при превышении определенного уровня давления начинается процесс аутогезионного взаимодействия сблизившихся внешних поверхностей кусков. В результате сыпучий сначала слой превращается в агломерат.

Если слой материала подвергнуть одновременно сжатию и сдвигу (рис.5.3, в), то процесса агломерации слоя можно избежать. Кроме того, сдвиговые деформации будут способствовать раскрытию трещин на границах раздела фаз и прочих дефектах структуры, что позволяет добиться большей степени измельчения материала. В то же время, процесс разрушения описанным способом сопровождается высокими диссипативными потерями энергии на трение, а также переизмельчением продукта.

Отмеченные недостатки могут быть в значительной степени устранены при использовании виброинерционного способа разрушения (рис.5.3, г). При данном способе разрушение материала в слое осуществляется при заданной и, что особенно важно, легко регулируемой с высокой точностью нагрузке в условиях интенсивного вибрационного воздействия. Это становится возможным благодаря устранению жесткой кинематической связи между матрицей и пуансоном и замене принципа заданности деформации слоя принципом заданности силы и цикличности ее воздействия. В этом случае деформация слоя определяется его сопротивлением разрушению и величиной заданной силы Р.

Интенсивное вибровоздействие на слой материала способствует постоянной интенсивной переориентации его частиц относительно друг друга в рабочей зоне, что повышает вероятность разрушения всех ослабленных зон в объеме каждой частицы, а также ускоряет удаление скапливающейся между кусками мелочи, уменьшая тем самым потери энергии и переизмельчение, характерные для других вариантов разрушения в слое. К тому же замена кинематических связей динамическими дает возможность селективно настраивать работу машины на ту или иную прочность, например межкристаллических связей.

Таким образом, анализ всех возможных видов силовых воздействий на разрушаемые тела позволяет сделать вывод, что чем сложнее комбинаторность способов разрушения, тем эффективнее и с меньшими затратами энергии протекает процесс.

5.5 Классификация процессов разрушения (дезинтеграции)

Процессы дезинтеграции формально и условно можно классифицировать по размерам зерен, кусков, частиц разрушаемого материала ($d_н$ – начальному, $d_к$ – конечному) и по степени разрушения – линейной $i = d_H/d_k$ или объемной $V_u = V_h/V_k$ (V_h – начальный объем, V_k – конечный объем зерна, частицы). Терминологическая классификация дезинтеграции приведена в таблице 5.1.

Для исследования закономерностей измельчения необходима характеристика дисперсности измельчаемого материала. *Дисперсностью* называют характеристику крупности частиц, составляющих дисперсную систему (сыпучую среду). Дисперсность может быть выражена либо функцией распределения частиц по крупности, либо некоторой величиной крупности, средней для всех частиц, либо величиной удельной поверхности сыпучего материала.

Таблица 5.1

Классификация процессов дезинтеграции

Технологическое определение		Конечный размер частиц $d_к$.мм
Дробление	крупное среднее мелкое	250 20 1-5
Измельчение (помол)	грубое среднее тонкое коллоидное	1.0-0,1 0,1-0,01 0,01-0,005 <0,005

Согласно приведенной классификации машины для разрушения (дезинтеграции) называют соответствующим образом: дробилки, измельчители, мельницы. Например, в названии *«конусная инерционная дробилка мелкого дробления КИД-300»* заложена информация не только о конструкции рабочих органов и принципе действия машины, но и о конечном среднем размере частиц, согласно таблице 5.1 – от 1 до 5 мм.

5.6 Теория Гриффица преодоления прочности упругих материалов

5.6.1 Разрушение как процесс образования новой поверхности

Для лучшего освещения теории Гриффица в пособии воспользуемся материалами книги «Почему мы не проваливаемся сквозь пол» Джеймса Эдварда Гордона. (The Newscience of Strong Materials or Why You Dont Fall Through the Floor, 1968). Ему принадлежит метод конструкционного использования пластиков, армированных асбестом, широко применяемый в самолето- и ракетострое-

нии в настоящее время. Позже он много работает в промышленности, проходит стажировку в Черчилль-колледже в Кембридже, является профессором кафедры технологии материалов Редингского университета. Проф. Гордон получил Британскую серебряную медаль Королевского общества авиации за работы по использованию пластиков в самолетостроении, а Клуб материаловедения присудил ему за вклад в эту область науки медаль Гриффица.

А.А. Гриффиц (1893–1963), молодой сотрудник Авиационного исследовательского центра в Фарнборо, носился с идеями, которые шли вразрез с традициями и противостояли скучной обыденности работ над материалами. Гриффиц ставил очень интересные вопросы. Почему столь велика разница в прочности различных тел? Почему прочность всех тел не одинакова? Почему вообще материалы имеют какую-то прочность? Почему бы им не быть прочнее? По крайней мере, сколь прочными они "обязаны" быть? До сравнительно недавнего времени все эти вопросы считались либо непостижимыми, либо несостоятельными.

Когда разрушается хрупкий материал, в области разрушения образуются две новые поверхности, которые до этого не существовали, и идея Гриффица заключалась в том, что нужно связать энергию новых поверхностей с энергией деформации тела перед разрушением. Теперь давайте разберемся, что же такое поверхностная энергия. Мы знаем, что энергия имеет много форм - тепловая, электрическая, энергия деформации и т.д., - но то, что поверхность твердого тела обладает энергией только в силу самого существования своего как поверхности, – это становится ясно не сразу.

Наблюдая дождевые капли, пузыри, насекомых, шагающих по поверхности воды, мы легко приходим к выводу, что вода, как и другие жидкости, имеет поверхностное натяжение. *Поверхностное натяжение* – это совершенно реальная физическая сила, которая может быть измерена без особого труда. Следовательно, если площадь поверхности жидкости увеличивается, то производится работа по преодолению этой силы, и энергия накапливается в новой поверхности. Подсчитывая баланс энергии, мы должны учитывать поверхностную энергию так же, как и другие виды энергии. Например, когда комар садится на воду, поверхность прогибается под его лапками; следовательно, площадь поверхности и ее энергия увеличиваются. Комар проваливается до тех пор, пока увеличение поверхностной энергии воды не сравняется с уменьшением потенциальной энергии насекомого, дальше комар не тонет, и это его, наверное, вполне устраивает.

Жидкость стремится по возможности уменьшить свою поверхностную энергию. К примеру, тонкая струя жидкости из только что закрытого крана, достигнув определенного диаметра, непременно разобьется на отдельные капли с меньшей поверхностной энергией. Когда жидкость замерзает, молекулярный характер ее поверхности изменяется мало, и энергия поверхности сохраняется, хотя поверхностное натяжение уже не в силах изменить форму твердой частицы, округлив ее подобно капле. В большинстве твердых тел межатомные связи прочнее и жестче, чем в обычных жидкостях, соответственно и величины по-

верхностной энергии у них в 10–20 раз выше. Не замечаем же мы поверхностного натяжения в твердых телах не потому, что оно слабое, а потому, что твердые тела слишком жестки, чтобы их форма заметно искажалась силами поверхностного натяжения.

Теперь, подобно тому, как мы стали бы вычислять вес самого большого комара, способного шагать по данной жидкости, попытаемся определить, сколь прочным должен быть тот или иной материал. Начав эти расчеты, основанные на вышесказанном, мы с удивлением обнаружим, что они очень простые.

Попробуем найти напряжение, которое необходимо для разделения в объеме материала двух примыкающих один к другому атомных слоев. Пока нам безразлично, какой материал рассматривать, кристаллический или аморфный. По существу все, что нам нужно знать, - это величины модуля Юнга и поверхностной энергии.

Итак, положим, что два слоя атомов вначале находятся на расстоянии x см один от другого, тогда энергия деформации на квадратный сантиметр при напряжении y и деформации e может быть найдена следующим образом: 1/2·(Напряжение·Деформация·Объем)=1/2yex. Но по закону Гука $E=ye$, то есть $e= y/ E$.

Заменяя в первом равенстве e через y/E, получим «Энергия деформации на квадратный сантиметр» = $y^2x/ 2E$.

Если G есть поверхностная энергия твердого тела на 1 см^2, то общая энергия двух поверхностей, образовавшихся при разрушении, будет $2G$ на 1 см^2.

Теперь предположим, что по достижении нашей теоретической прочности a, вся энергия деформации в объеме между двумя слоями атомов переходит в поверхностную энергию, то есть $y^2x/2E = 2G$. Отсюда $y= (GE/x) /2$.

Правда, мы немного завысили теоретическую прочность, так как предполагали, что материал подчиняется закону Гука вплоть до разрушения. Но закон Гука верен лишь для малых деформаций, а при больших деформациях кривая зависимости межатомной силы от деформации отклоняется вниз от прямой. Поэтому энергия деформации будет меньше найденной нами энергии, грубо говоря, вдвое. Чтобы учесть это, мы просто опустим двойку в выведенной нами формуле, имея в виду, что мы не претендовали на получение точной величины прочности. Следовательно, правдоподобную оценку прочности материала должно давать выражение $y= 2(GE/x)1/2$ проще которого едва ли что можно придумать.

Теперь применим эту формулу к стали, типичными величинами для которой будут: поверхностная энергия G= 1000 эрг/см^2, модуль Юнга E= 2x10^{12} дин/см^2, межатомное расстояние x = 2x10^{-8} см.

Подставив эти значения в формулу, получим прочность около 3x10^{11} дин/см^2, то есть примерно 3000 кг/мм^2, что составляет около $E/6$, Прочность

обычной стали - около 50 кг/мм^2, прочность специальной проволоки может быть 300 кг/мм^2.

Так как величины E и G для разных твердых тел различны, мы получим для них и различные значения теоретической прочности. Единственное, что будет роднить эти числа, - все они намного превысят значения прочности, которые нам дают реальные материалы. Пожалуй, сталь составляет исключение в этом смысле: реальная прочность некоторых сортов стали достигает все-таки 1/10 от вычисленной прочности; огромное большинство твердых тел имеет всего сотую или даже тысячную долю теоретической прочности.

Лет 70–80 назад никто не рискнул бы публично усомниться в этих вычислениях. Ведь в таком случае нужно было бы дать объяснения, откуда берется энергия вновь образованных поверхностей. Почему-то серьезно за это никто не брался. Где-то что-то было не так, и, пожалуй, рассуждали многие, лучше об этом поменьше говорить.

Если мы займемся вычислением лишь прочности как таковой, то для различных материалов получим различные значения теоретической прочности. Однако мы легко можем найти теоретические величины упругой деформации при разрыве; проделав это, мы обнаружим, что вычисленные деформации окажутся примерно одинаковыми для любого твердого тела почти независимо от его химической природы. Вообще говоря, величина этой деформации составляет примерно 10–20%. Если это так, то прочность твердого тела должна лежать между $E/10$ и $E/5$. Таким образом, мы не вправе сказать, что все материалы должны иметь одну и ту же прочность, но мы можем утверждать (правда, без гарантированной точности), что все материалы должны были бы иметь одну и ту же упругую деформацию при разрыве. Повседневная практика, однако, убеждает нас, что материалы не только не имеют постоянной деформации при разрыве, но и расчетные прочности во всех без исключения случаях намного превышают реальные значения.

Гриффиц задался целью найти физическую теорию, которая позволила бы объяснить расхождение между теорией и практикой. Помощник Гриффица Бен Локспайсер рассказывал мне кое-что об обстоятельствах, при которых велась эта работа. В те времена считалось, что ученые исследователи должны зарабатывать на жизнь лишь прикладными работами. Отсюда следовало, что материаловеды должны были ограничиваться исследованием применяемых в технике материалов, таких, как древесина или сталь. Гриффицу нужен был гораздо более простой материал, он хотел иметь материал с чисто хрупким разрушением. Поэтому он обратился к стеклу. Сейчас мы назвали бы такой материал модельным, тогда же очень популярными были модели в аэродинамических трубах, но, помилуйте, кому приходилось прежде слышать о модельном материале?

Имея все это в виду, Гриффиц и Локспайсер остерегались обсуждать с руководством подробности своих экспериментов. Однако работа включала вытягивание волокон и выдувание пузырей из расплавленного стекла, и однажды, когда они проработали уже несколько месяцев, Локспайсер, уходя домой, забыл погасить газовую горелку, на которой друзья плавили стекло. Пришлось давать

объяснения по поводу случившегося пожара, после чего Гриффицу и Локспайсеру было приказано прекратить пустое времяпрепровождение. Гриффиц был переведен на другую работу, позже он стал известным конструктором двигателей.

Гриффиц первым стал систематически изготавливать стекловолокна и, исследуя их механические свойства, нашел правдоподобное объяснение полученным результатам. Вначале Гриффиц должен был, хотя бы приблизительно, определить теоретическую прочность стекла, с которым работал. Модуль Юнга легко было найти путем простых механических испытаний, а величина межатомного расстояния не должна была сильно отличаться от 2–3 *А*.

Оставалось измерить поверхностную энергию. А в простоте ее определения для стекла и заключалось одно из достоинств этого материала в качестве объекта исследования. Дело в том, что стекло не имеет фиксированной точки плавления, а при нагреве медленно изменяется от хрупкого твердого тела до состояния вязкой жидкости, и в ходе этого процесса существенных изменений молекулярной структуры не происходит. Поэтому при переходе от жидкого состояния к твердому не следует ожидать и сильных изменений величины поверхностной энергии, и потому поверхностное натяжение и поверхностная энергия, которые достаточно легко измеряются на расплавленном стекле, можно с известной точностью применять и при анализе затвердевшего стекла. Если нагреть конец стеклянного стержня в пламени газовой горелки, то, размягчившись, стекло будет стремиться принять форму шара, потому что силы поверхностного натяжения остаются достаточно большими и после того, как сопротивление деформированию по существу исчезло. Нетрудно измерить силу, необходимую для медленного вытягивания стержня в этих условиях. Но ведь она лишь очень немногим больше сопротивления поверхностному натяжению. На основании такого рода экспериментов, выполненных на очень простых приборах, Гриффиц установил, что теоретическая прочность его стекла при комнатной температуре должна быть почти 1400 кг/мм^2.

Затем Гриффиц взял холодные стержни диаметром около 1 мм из того же обычного стекла, разорвал в испытательной машине и определил их прочность. Она оказалась около 15–20 кг/мм^2, что вполне нормально для тех стекол, из которых делают лабораторную посуду, пивные бутылки; эти же стекла вставляют в окна и т.д. Но эта прочность составляла около 1/50–1/100 от расчетной.

Тогда Гриффиц стал нагревать свои стержни посередине и оттягивать их концы. Получались более тонкие стержни-нити, которые он также после охлаждения испытывал.

Чем тоньше были полученные нити, тем они оказывались прочнее. Сначала их прочность увеличивалась медленно, но по мере того, как они становились очень тонкими, прочность возрастала весьма быстро. Прочность волокон диаметром около 2,5 мкм сразу после вытягивания составляла 600 кг/мм^2 и более, а спустя несколько часов падала примерно до 350 кг/мм^2. Кривая зависимости прочности от диаметра волокна росла столь стремительно (рис. 5.4), что

трудно было установить верхний (максимальный) предел для величины прочности.

Зависимость эта не была очень гладкой, опытные точки имели некоторый разброс. Однако по поводу общей тенденции никаких сомнений не оставалось. Гриффиц не мог ни изготовить, ни испытать волокна тоньше примерно 2,5 мкм, да если бы он и смог это сделать, в его время измерить толщину таких волокон хоть с какой-нибудь точностью было бы очень трудно. Однако он проделал простой математический трюк: отложив по осям координат обратные величины, он экстраполировал кривую "*прочность-размер*" в область ничтожно малых толщин, и оказалось, что прочность тончайших нитей должна быть около 1100 кг/мм^2.

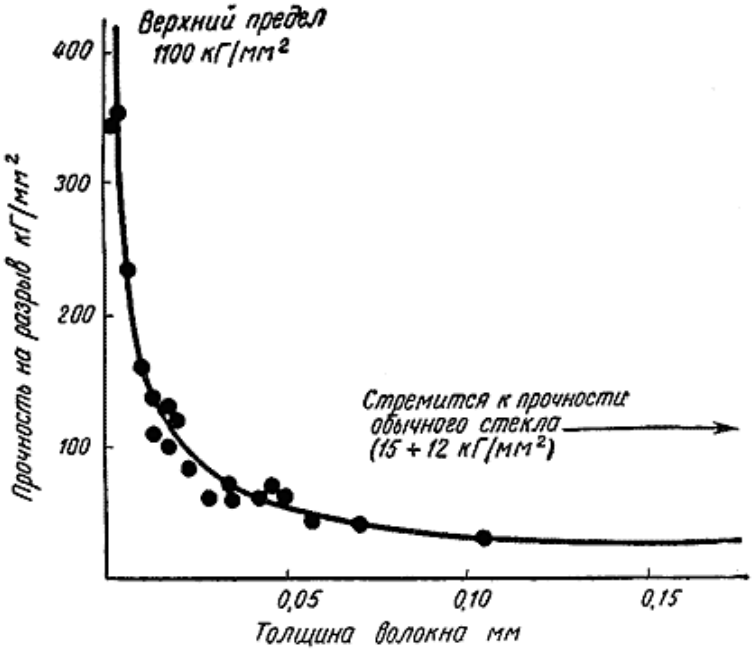


Рис. 5.4 – График зависимости прочности стеклянных волокон от толщины волокна, построенный Гриффицем

Напомним, что вычисленная величина прочности для его стекла была чуть меньше 1400 кг/мм^2. Поэтому Гриффиц сделал вывод, что ему практически удалось приблизиться к теоретической прочности, и, если бы на самом деле можно было сделать более тонкие волокна, их прочность была бы очень близка к теоретической. Достичь в эксперименте почти теоретической прочности было, конечно, триумфом, особенно если учесть условия, в которых этот эксперимент проводился.

Дж. Морли из фирмы "Роллс-Ройс" получил кварцевые волокна (их состав отличается от состава гриффицова стекла) с прочностью более 1400 кг/мм^2 (рис. 5.5), столь высокая прочность может быть получена не только на стеклянных волокнах, но и почти на любых твердых телах, аморфных и кристаллических.

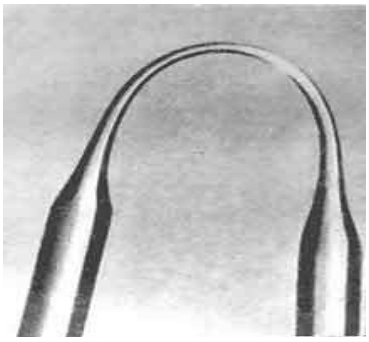


Рис. 5.5 – Кварцевая нить, упруго изогнутая до деформации 7,5%;
напряжения в ней доходят до 530 кг/мм^2
(прочность обычного стекла 7-15 кг/мм^2)

Итак, Гриффиц продемонстрировал (по крайней мере, в одном случае), каким образом можно на практике достигнуть почти теоретической прочности. Теперь он должен был показать, почему прочность подавляющего большинства твердых тел столь резко отличается от теоретической.

В современной теории прочности обнаруженный Гриффицем эффект повышения прочности при уменьшении размеров тел называют *масштабным фактором упрочнения* при разрушении (измельчении, дроблении).

5.6.2 Трещины Гриффица

По-видимому, Гриффиц думал, что трещины, которые он считал реально существующими в стекле, разбросаны во всем его объеме и возникают в процессе затвердевания стекла из-за неспособности его молекул сомкнуться друг с другом на отдельных участках. Оглядываясь назад, можно только удивляться тому, как много времени понадобилось, чтобы отвергнуть это представление. Расчеты Гриффица показывали, что трещины – каково бы ни было их происхождение – должны быть весьма узкими, возможно, порядка сотых долей длины волны обычного видимого света. Так как увидеть объекты, по размерам намного меньшие, чем длина волны освещающего их света, принципиально невозможно, то рассмотреть трещины Гриффица непосредственно через обычный оптический микроскоп, который в лучшем случае позволяет видеть предметы размером около полумикрона, не было никакой надежды. Пришлось ждать появления электронного микроскопа, в котором изображение создается электронами с длиной волны что-нибудь около 1/25 А, в то время как видимый свет имеет длину волны около 4000 А.

Но уже в 1937 году, то есть еще до того, как в лабораториях появились электронные микроскопы, Андраде и Цинь решили поискать трещины в стекле с помощью простого оптического микроскопа, прибегнув к так называемому декорированию. Этот метод, часто весьма действенный, можно представить себе следующим образом. Пусть тонкая проволока, например телеграфный провод, натянута так далеко от вас, что ее совершенно не видно. Но если бы удалось как-то заманить на нее стаю ласточек, проволока сразу же бросилась бы нам в глаза. (По этой самой причине связисты иногда насаживают пробки на телеграфные провода.) Теперь представьте себе, что появилась новая стая и уселась на спины уже знакомых нам птиц – проволока стала еще заметнее. В

принципе таким образом нашу проволоку можно сделать сколь угодно толстой. Теперь остается лишь вспомнить, что некоторые вещества кристаллизуются легче, если на подложке есть какие-то отклонения от регулярности. Выбрав подходящее вещество и заставив его кристаллизоваться на какой-то поверхности, вы часто можете заметить, что новые кристаллы зарождаются почти исключительно на тонких нерегулярностях этой поверхности и, следовательно, делают последние видимыми для наблюдателя.

Андраде осаждал на поверхности стекла пары натрия, которые при конденсации создавали на ней сетку линий. Можно было предположить, что это были трещины, но полной уверенности, конечно, не было: в подобном опыте нетрудно было получить изображение марсианских каналов или любых других химер. Но даже если эти узоры и выявляли тончайшие трещины на поверхности стекла (что, кажется, в действительности так и было), то это еще не служило доказательством отсутствия в стекле внутренних трещин.

В послевоенные годы удалось показать, что исключительно прочны не только тончайшие, но и довольно толстые волокна, если они тщательно изготовлены. Прочные стекловолокна от прикосновения к ним слабеют, а слабые – упрочняются, если удалить с них поверхностный слой химическим путем. Все это дало основания считать, что волокна ослабляются главным образом дефектами на поверхности стекла.

Приблизительно в 1957 году Паррат научилась воспроизводить прекраснейшие образцы трещин на поверхности стекол всех сортов. Многие из этих трещин, пожалуй, большая их часть, представляли собой тончайшие волосовины. Плотность распределения трещин очень хорошо увязывалась с прочностью образцов различных стекол. Вопрос теперь состоял только в том, чтобы выяснить, как же трещины возникали на поверхности стекол. Во многих случаях сомнений насчет природы трещин не оставалось: трещины оказались царапинами, нанесенными стеклу другими соприкасавшимися с ним твердыми телами. Паррат сфотографировала такие типичные трещины (рис. 5.6 и 5.7).

Достаточно самого легкого прикосновения к стеклу чтобы создать на его поверхности совершенно законченные образцовые трещины. Лишь в очень редких случаях стекло оберегается от подобных прикосновений с самого момента его изготовления из расплавленной стекломассы.

Отнюдь не исключено, что это простое объяснение давало исчерпывающий ответ на вопрос о происхождении трещин для большей части обычных стекол. Высокую прочность тонких волокон можно отчасти объяснить тем, что они очень легко гнутся и их проще изогнуть, чем поцарапать. Однако наблюдается ряд случаев, когда прочность стекла меняется, хотя его поверхность сохраняется совершенно неповрежденной. Одна из причин этого была изучена Маршем.

Когда жидкости затвердевают, они чаще всего кристаллизуются. Обычно кристаллы бывают плотнее исходной жидкости (хотя известны исключения из этого правила, например вода). В кристаллах атомы располагаются более упорядоченно и теснее друг к другу, чем в жидкости. Стекла же в процессе затвер-

девания бывают столь вязкими, что их молекулы не успевают рассортироваться так, чтобы образовать кристаллы. Поэтому стекло – это переохлажденная и застывшая жидкость, а не кристаллическое твердое тело.

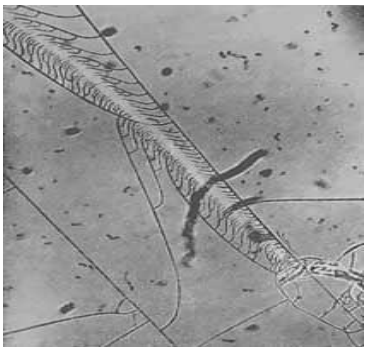


Рис. 5.6 – Трещины вблизи царапины на поверхности стекла (7000)

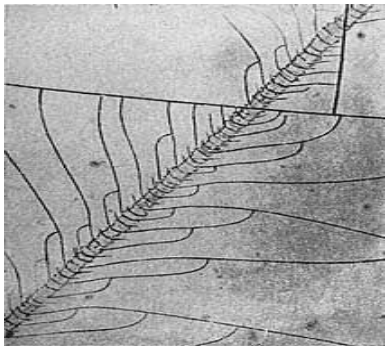


Рис.5.7 – Царапина на предметном стекле микроскопа

Однако и в стекле существует тенденция к кристаллизации, и некоторые стекла со временем превращаются в кристаллические тела. Это явление называют расстекловыванием. Поскольку стекла при расстекловывании дают усадку, этот процесс часто сопровождается разупрочнением, отчего стекла рассыпаются на кусочки. Обычно античные стекла доходили до нас в расстеклованном состоянии, ведь их, как правило, плохо варили. К тому же с тех пор прошло более чем достаточно времени и они вполне успели закристаллизоваться. Правда, став непрочными, они не стали менее прекрасными. Как показал Марш, в некоторых стеклах, даже самых свежих, расстекловывание происходит с самого начала. Ему удалось сфотографировать на электронном микроскопе крошечные кристаллики и показать, что усадка в ходе их образования достаточна, чтобы зародилась трещина, бегущая затем по всему куску стекла. Надо подчеркнуть, что стекло в тонких волокнах от обычного стекла ничем особенно не отличается. Если поверхность толстого стекла сделать гладкой и постараться сохранить ее в таком виде, то по прочности это стекло не уступит тонкому волокну. Однако добиться этого на практике обычно очень трудно.

Если в стеклоподобном аморфном материале трещина, берущая начало от того или иного местного дефекта, не распространяется, то почему же и каким образом он все-таки разрушается? В таких случаях материал, подобно пластилину, течет и разрушается от сдвига. Поскольку стекло начинает течь при комнатной температуре лишь под действием очень большого напряжения и к тому же оно легко разрушается от распространения трещины, постольку оно, как и другие аморфные материалы, практически всегда разрушается хрупким образом. Мы к этому привыкли, и нам трудно представить себе, что они могут разрушаться иначе. На самом же деле, если растрескивание стекла, которое происходит при растяжении, предотвратить, например, путем всестороннего его сжатия, то в этом случае стекло можно заставить течь, как текут пластичные материалы. Стекло, когда на него оказывают давление притупленной алмазной иглой (индентором), ведет себя подобно замазке, но ведь касательное напряже-

ние, необходимое для течения, гораздо выше наблюдаемой прочности. В обычных стеклах оно превышает при комнатной температуре 350 кг/мм^2.

Марш показал, что стекло, если в нем почти отсутствуют трещины, действительно течет. При комнатной температуре напряжение течения в стекле обычно превосходит 350 кг/мм^2. Интересно, что температура сравнительно слабо влияет на тенденцию к разрушению стекла путем распространения трещин, в то время как касательное напряжение течения сильно зависит от температуры. Когда мы нагреваем стекло, не доводя его до плавления, напряжение течения снижается быстрее, чем напряжение хрупкого разрушения. Именно поэтому нагретое стекло (не обязательно очень горячее) довольно легко гнется, формуется и поддается выдуванию. Наоборот, свободное от дефектов стекло становится прочнее при охлаждении, так как при этом повышается его сопротивление течению. Из-за этого стекло с хорошей поверхностью при температуре -180°С по своей прочности примерно в два раза превосходит то же стекло при комнатной температуре.

Обобщая все сказанное выше, можно заключить, что всегда существуют два механизма, ведущих спор за право разрушить материал, – пластическое течение и хрупкое растрескивание. Материал уступает тому или другому из них. Если он начинает течь, прежде чем растрескается, то, значит, он пластичен. Если же он растрескивается до того, как начал течь, то мы имеем дело с хрупким материалом. Потенциальные возможности обоих видов разрушения заложены во всех материалах.

5.6.3 Решение задачи Гриффица

Итак, Гриффиц впервые описал разрушение материалов как процесс образования новой поверхности. Согласно теории Гриффица, высвобождающаяся энергия упругого деформирования расходуется на увеличение поверхностной энергии растущей трещины. В основу простейшей модели разрушения положено два альтернативных предположения: либо элемент среды сплошной, либо он разрушен на части, прилегающие к краям трещины. Тело с такими свойствами – *идеально хрупкое*. Следовательно, модель разрушения можно задать независимо от реологической модели среды и рассматривать идеально хрупкое тело со всеми основными механическими свойствами – упругостью, вязкостью, пластичностью. Критерии оценки предельного состояния трещин основаны на модели идеально хрупкого тела.

В механике разрушения трещину отличают от разреза, представляя ее в виде поверхности разрыва смещений, размеры которой изменяются под действием приложенных к телу внешних нагрузок. Тело, разрушение которого происходит вследствие развития трещин, называют хрупким. Если напряжение в вершине дефекта достигнет теоретического предела прочности, произойдет хрупкое разрушение, и длина трещины увеличится. Местное разрушение в вершине трещины может перейти в самопроизвольное при выполнении определенного условия, сформулированного Гриффицем. Он установил возможные

причины отличия реального предела прочности кристаллических тел от теоретического (первый примерно на два порядка меньше). Гриффиц предположил, что макроскопически гомогенный образец может содержать малые дефекты, способствующие концентрации напряжений, достигающих в локальных областях теоретического предела прочности, и из энергетических соображений сформулировал условие хрупкого разрушения для самопроизвольного распространения одиночной трещины в линейно-упругом теле.

Согласно *условию Гриффица* разрушение происходит, когда при бесконечно малом удлинении трещины выделяется больше упругой энергии, чем это требуется для образования новых поверхностей. Поверхностная энергия должна быть меньше высвобождающейся упругой энергии, что возможно по достижении критического размера трещины.

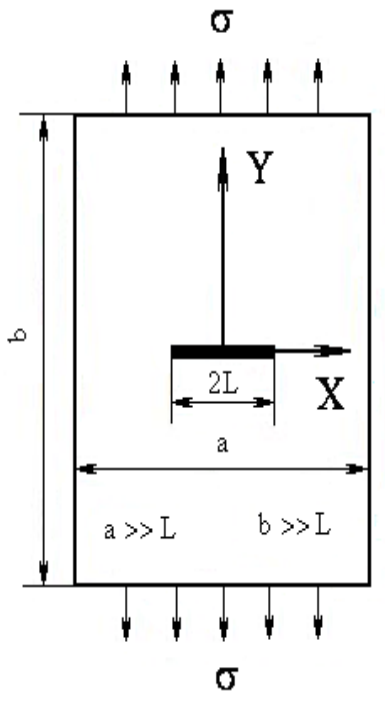


Рис. 5.8 – Схема растяжения тонкой пластины с трещиной

Преимущество подхода Гриффица в том, что искомое соотношение получается без детального анализа процесса, поэтому применимость теории связана с существованием простого, независимо от пути нагружения, механизма разрушения и отсутствием барьеров для распространения трещины. Все это указывает на термодинамический характер теории Гриффица; трещина распространяется самопроизвольно под действием приложенной нагрузки только тогда, когда общая энергия системы уменьшается.

Пусть тонкая пластина толщиной $h << a, b$ (рисунок 5.8), состоящая из хрупкого материала, равномерно растягивается напряжениями б в своей плоскости. Пластина имеет трещину длиной $2L$, ориентированную перпендикулярно нагрузке, причем $L << a, b$. Средняя площадь области концентрации напряжений вокруг трещины пропорциональна L^2. Средняя плотность упругой энергии, как показано Работновым Ю.Н. (Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.), на единицу площади пропорциональна $\sigma^2 m/[G(3m\text{-}1)]$, $m = K/G + 1/3$; K – модуль объемного сжатия; G – модуль сдвига. Тогда изменение упругой энергии:

$$\Delta U_e = U_e - U_{ec} \approx L^2\sigma^2(3m-1)/(Gm), \qquad (5.22)$$

где U_e и U_{ec} — упругая энергия пластины соответственно без трещины и с трещиной; m – коэффициент пропорциональности.

Расчет энергии пластины при плоском напряженном и плоском деформированном состояниях различен.

В первом случае рост трещины вызывает удлинение пластины, дополнительная работа, совершаемая при этом, превышает прирост поверхностной энергии и энергии деформации. Во втором случае продвижение трещины приводит к освобождению энергии упругой деформации, которая покрывает до-

полнительные затраты энергии. Решение задачи Гриффица получено для упругой плоскости с эллиптическим вырезом, равномерно растягиваемой на бесконечности напряжением σ. Заменив эллипс бесконечно тонким разрезом длиной $2L$, можно определить энергию, выделяемую при уменьшении напряжения σ_y от σ до нуля:

$$U = 2\left(-\frac{1}{2}\sigma \int_{-l}^{l} u_y \, \mathrm{d}\, x \right) = \pi L^2 \frac{\sigma^2}{G} \frac{m+1}{4m}, \tag{5.23}$$

которая равна работе раскрытия трещины. В задаче Гриффица упругая энергия тела при его разрыве увеличивается и $|U| = \Delta U_e$. Тогда для плоского деформированного состояния $\Delta U_e = \pi L^2 \sigma^2 (m + 1)/(G \cdot 4m)$, для плоского напряженного состояния $U_e = \pi L^2 \sigma^2 m/[G(m\text{-}1)]$, так как вблизи конца трещины возникают отличные от нуля компоненты напряжений по толщине, что связано с неравномерной деформацией. Для образования двух новых поверхностей трещины площадью $2S=4Lh$ необходима поверхностная энергия $2U_s=4L\gamma$ при $h=1$, где γ– удельная поверхностная энергия, равная произведению силы на перемещение в вершине растущей трещины. Удельная энергия, расходуемая на распространение трещины $\partial U_S / \partial L = 2\gamma = R$, где R – сопротивление распространению трещины.

Трещина распространяется перпендикулярно направлению растяжения, если в результате изменения упругой энергии для ее распространения при плоском напряженном состоянии:

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta U_e}{\mathrm{d}\,S} = \frac{\mathrm{d}\,\Delta U_e}{2\,\mathrm{d}\,L} = \pi L \frac{\sigma^2}{G} \frac{m}{3m-1}; \tag{5.24}$$

при плоском деформированном состоянии:

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta U_e}{2\,\mathrm{d}\,L} = \pi L \frac{\sigma^2}{G} \frac{m+1}{4m}, \tag{5.25}$$

освобождается необходимая поверхностная энергия для образования новой поверхности разрушения:

$$\pi L \frac{\sigma^2}{G} \frac{m}{3m-1} = 2\gamma \qquad \text{и} \qquad \pi L \frac{\sigma^2}{G} \frac{m+1}{4m} = 2\gamma \tag{5.26}$$

соответственно. Следовательно, для плоского напряженного и плоского деформированного состояний:

$$\sigma = \left[\frac{2G\gamma}{\pi L} \frac{3m-1}{m} \right]^{1/2}; \tag{5.27}$$

$$\sigma = 2\left[\frac{2G\gamma}{\pi L} \frac{m}{m+1} \right]^{1/2}. \tag{5.28}$$

Обозначив интенсивность выделения упругой энергии Q, запишем условие распространения трещины: $Q=R$. Если учесть, что

$$Q_I = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \sigma_y u_y \, \mathrm{d}\, r, \qquad (5.29)$$

где $\delta = r + L - x$,

а также, в случае нормального отрыва (рис.5.9):

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}};$$

$$u_y = \frac{K_I}{G} \frac{2m}{3m-1} \sqrt{\frac{(L-x)^2 / L}{\pi}}, \qquad (5.30)$$

получим:

– для плоского деформированного состояния

$$Q_I = \frac{K_I^2}{G} \frac{m+1}{4m}; \qquad (5.31)$$

– для плоского напряженного состояния

$$Q = \frac{K_I^2}{G} \frac{m}{3m-1} \qquad (5.32)$$

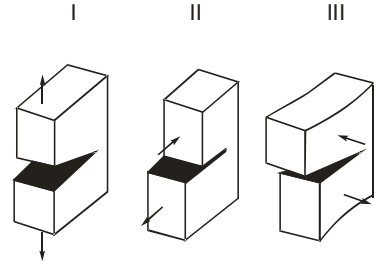


Рис. 5.9 – Схемы перемещений поверхности трещины для задач основных типов
I – нормальный отрыв;
II – поперечный сдвиг;
III – продольный сдвиг

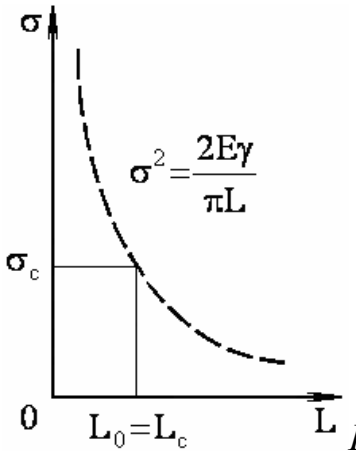


Рис. 5.10 – Графическая интерпретация условия Гриффица

Аналогично можно показать, что для задач типов II и III (рис.5.9):

$$Q_{II} = \frac{K_{II}^2}{G} \frac{m+1}{4m};. \; Q_{III} = \frac{K_{III}^2}{2G} \qquad (5.33)$$

Суммарная интенсивность выделения энергии при распространении трещин смешанного типа:

$$Q = Q_I + Q_{II} + Q_{III} =$$

$$= \frac{m+1}{4Gm} \left(K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 \frac{2m}{m+1} \right) \qquad (5.34)$$

Согласно (5.22) процесс идет следующим образом: с увеличением напряжения σ начальная длина L_0 трещины постоянна до тех пор, пока σ не достигнет предельного значения σ_c, определяемого равенством $\sigma^2 = 2E\gamma/(\pi L)$ (рис. 5.10), после чего начинается самопроизвольный процесс развития трещины. Следовательно, состояние предельного равновесия характеризуется равенством:

$$\sigma = \left[\frac{2G\gamma}{\pi l_c} \frac{3m-1}{m} \right]^{1/2} = \sigma_c. \qquad (5.35)$$

При $\sigma > \sigma_c$ происходит лавинный процесс разрушения, что является следствием большого запаса потенциальной энергии деформации, интенсивность освобождения которой увеличивается с увеличением длины трещины. Трещины

с указанной особенностью называют равновесными, трещины, длина которых увеличивается с увеличением напряжения σ, – неравновесными.

Применимость теории Гриффица ограничена. Критерий (5.31) и (5.32) сформулирован для условий «неподвижных захватов», когда внешние силы не перемещаются и не производят работы. Теория дает необходимые условия развития трещины, но они не являются достаточными, так как обратное утверждение в общем случае несправедливо. Должно существовать дополнительное условие, например – достижения критического напряжения, что указывает на термодинамический подход к решению задачи, так как при таком подходе рассматривают только исходное состояние, не учитывая особенности развития разрушения на длине dL. Части пластины, расположенные по обе стороны от образованной трещины, начинают двигаться и приобретают кинетическую энергию, которая не учитывается энергетическим балансом. При высокоскоростной деформации составляющая кинетической энергии в общем балансе может быть весьма существенной и может оказывать значительное влияние на процесс развития разрушения.

Теория Гриффица для сред, разрушение которых протекает без существенного пластического деформирования, имеет экспериментальное подтверждение. Принцип Гриффица, связывающий удлинение трещины с изменением энергии в удаленных от вершины трещины областях, применяют во всех методах определения вязкости разрушения, различны лишь способы оценки энергии. При анализе разрушения сред, происходящего с предварительной пластической деформацией, необходимо учитывать часть энергии, расходуемой на пластическую деформацию у вершины трещины. Поскольку точно определить отдельные компоненты энергии разрушения невозможно, подход Гриффица для пластических сред непригоден.

Критерий Гриффица позволяет анализировать поведение трещины только при выполнении автономности краевой зоны для идеально хрупких тел. Размеры области действия сил сцепления в концевой зоне трещины в большинстве случаев малы по сравнению с размерами трещины, поэтому можно использовать модель идеально хрупкого тела, пренебрегая размерами области ослабленных связей. Однако и в этом случае необходимо дополнительно обосновать применимость критерия Гриффица, чтобы избежать искаженных результатов, характеризующих поведение трещины.

Условие Гриффица $dU_S/dL=4\gamma$ можно записать в виде, $R=2\gamma$ если $R=CK^2$, где C – постоянная, зависящая от упругих характеристик среды; K – коэффициент интенсивности напряжений. Тогда условие Гриффица, как показано Ирвином, можно представить в виде

$$K = \sqrt{2\gamma / C} \equiv K_c . \qquad (5.36)$$

При выполнении равенств (5.36**)** трещина начнет самопроизвольно распространяться, так как интенсивность напряжений достигает критического значения K_c. Формула (5.36) заменяет энергетический критерий Гриффица силовым условием в вершине трещины, позволяет использовать характеристики напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины и являет-

ся локальным условием разрушения. Согласно критерию Ирвина трещина начинает распространяться, когда коэффициент K достигает критического значения K_c, характерного для данной среды. Критерий Ирвина эквивалентен условию Гриффица, более удобен в применении и широко используется на практике. Несмотря на внешне локальный характер критерия (5.36), коэффициент K отражает влияние упругого поля всего тела на состояние в вершине трещины.

Итак, согласно вышеизложенному, при хрупком разрушении рост трещины объясняется тем, что высвобождающаяся энергия упругого деформирования превышает энергию, необходимую для образования новой поверхности.

5.7 Процесс образования новой поверхности в телах, обладающих пластичностью

В неабсолютном упругом теле у вершины трещины возникает пластическая деформация. Тогда при достаточно малой величине пластической деформации, добавляя к поверхностной энергии γ_S энергию, затраченную на пластическое деформирование γ_P, можно использовать аналогичный подход, подставляя в выражение для удельной поверхностной энергии $\gamma_S' = \gamma_S + \gamma_P$ вместо γ_S. Дагдейл и Баренблатт предложили модель образования новой поверхности для идеально пластичного тела (рис. 5.11).

При увеличении напряжения σ напряжение у вершины трещины достигает предела текучести материала σ_m и начинается пластическая деформация. Рассматривается трещина размеров $z = a + s$.

В области $|a| < x < |a + s|$ действует напряжение, равное пределу текучести и стремящееся захлопнуть трещину. В этой области действуют силы «связывания». Величина s определяется следующим уравнением:

$$s/a = \sec\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)\right] - 1 \qquad (5.37)$$

При выполнении условия $\sigma << \sigma_T$ уравнение (5.37) можно приближенно представить в виде:

$$s = \frac{\pi^2}{8} a \left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_1}{\sigma_m}\right)^2, \qquad (5.38)$$

где K_1 – коэффициент интенсивности напряжений для первого типа деформирования (одноосного растяжения) (рис. 5.8), определенный Гриффицом:

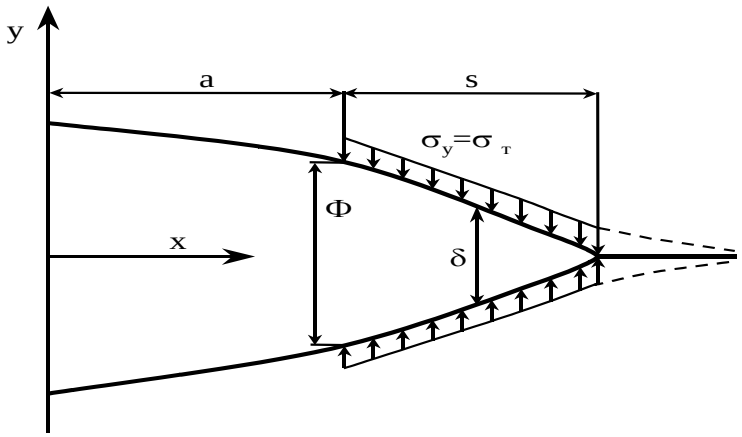


Рис 5.11 – Модель Дагдейла-Баренблатта для двухмерного идеально пластичного тела

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}\,. \qquad (5.39)$$

Величина Ф (рис. 5.11) соответствует расстоянию, на которое расходятся поверхности трещины в ее вершине в результате пластической деформации. Эта величина рассчитывается по формуле:

$$\Phi = \frac{8\sigma_m a}{\pi E}\ln\frac{a+s}{a} = \frac{8\sigma_m a}{\pi E}\ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)\right]. \qquad (5.40)$$

При $\sigma << \sigma_m$ с учетом того, что $s/a << L$ и $\ln[(a + s)/a] \approx s/a$, уравнение (5.40) принимает вид:

$$\Phi = \frac{\pi\sigma^2 a}{E\sigma_m} = \frac{K_1^2}{E\sigma_m} \qquad (5.41)$$

Выражение для Φ (5.41) имеет важное практическое значение. Она определяет минимальную величину деформации растяжения образца, необходимую для начала когезионного разрушения дисперсной системы, т.е. преодоления поверхностного взаимодействия в коагуляционных структурах, либо в конденсационно-кристализационных, обладающих пластичностью.

5.8 Современные представления о поверхностной энергии

Поверхностная энергия или энергия поверхности является одним из основных понятий термодинамики. Термодинамика как наука изучает наиболее общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии энергетического равновесия, а также процессы перехода между этими состояниями.

Термодинамический метод исследования систем, состоящих из большого числа структурных элементов, строится на основе применения к системам нескольких принципов или начал (аксиом), которые являются обобщением опыта, не рассматривая при этом микроструктуры систем и совершающихся в них процессов. Термодинамика по сути является феноменологической аксиомативной наукой.

Все материалы биологического происхождения и продукты на их основе можно рассматривать как макроскопические системы, являющиеся, как было обосновано во второй главе, дисперсными. Важнейшими признаками дисперсных систем являются гетерогенность и дисперсность.

Признак гетерогенности, определяющий наличие поверхностей раздела между отдельными фазами обусловливает многие характерные свойства дисперсных систем. Гетерогенность количественно определяется поверхностным натяжением – величиной, характеризующей энергию единицы поверхности.

Дисперсность или раздробленность определяется размерами и геометрией частиц твердой фазы и также способна придавать новые свойства не только отдельным элементам дисперсной системы, но и всей дисперсной системе. С ростом дисперсности повышается роль поверхностных явлений в системе.

Сопоставляя два основных признака дисперсных систем, можно прийти к выводу, что *дисперсность* является чисто количественным параметром, харак-

теризующим степень раздробленности, размер межфазной поверхности. *Гетерогенность* же указывает на качественную характеристику системы, так как поверхностное натяжение определяет резкость перехода от одной фазы к другой, различие между соприкасающимися фазами. Отсутствие гетерогенности равнозначно отсутствию поверхностного натяжения.

Произведение поверхностного натяжения σ на площадь поверхности S дает *поверхностную энергию Гиббса* G:

$$G = \sigma S \tag{5.42}$$

Величина σ является удельной поверхностной энергией, имеющей единицу измерения Дж/м^2 или Н/м, если говорят о поверхностном натяжении для жидкостей, что не меняет сути этого параметра.

Таким образом, любая индивидуальная дисперсная система будет обладать присущим ей значением поверхностной энергии, предопределяемым, главным образом, дисперсностью твердой фазы, т.е. площадью взаимодействия фаз системы. Для любой гетерогенной системы объединенное уравнение первого и второго начал термодинамики, в которое входят основные виды энергии, можно записать в следующей форме:

$$dG = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}P + \sigma\,\mathrm{d}S + \sum \mu_i\,\mathrm{d}n_i + \varphi\,\mathrm{d}q, \tag{5.43}$$

где G – энергия Гиббса; S – энтропия; T – температура; V – объем; P– давление; σ – поверхностное натяжение; dS – изменение площади поверхности; n_i –число молей компонента i; φ– электрический потенциал; q – количество электричества; μ_i – химический потенциал компонента i.

Это уравнение выражает приращение энергии Гиббса системы через алгебраическую сумму приращений других видов энергии и из него следует пять возможных процессов превращения поверхностной энергии:

1 – в энергию Гиббса;

2 – в тепловую энергию;

3 – в химическую энергию;

4 – в механическую энергию;

5 – в электрическую энергию.

В тоже время уравнение (5.43) отображает взаимопревращение различных видов энергии в системе при создании соответствующих условий.

Комплексно термодинамическое равновесие, представленное в выражении (5.43) проявляется при *адгезии* – поверхностном взаимодействии между дисперсной фазой и дисперсионной средой. Адгезия в дисперсной системе возникает в том случае, если при взаимодействии твердой и жидкой фаз наблюдается уменьшение свободной энергии системы**.** С определенным приближением можно сказать, что изменение свободной энергии dF системы «твердое тело – жидкость» при адгезии равно изменению внутренней энергии системы dU минус тепло, выделяющееся при завершении процесса взаимодействия, и определяется законом Гельмгольца:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S. \tag{5.44}$$

Следовательно, *явление адгезии* определяется значением изменения внутренней энергии системы. Если между молекулами твердого вещества и жидко-

сти силы притяжения меньше сил притяжения между молекулами жидкости, то при поверхностном взаимодействии энергия не выделяется, а поглощается. Следовательно, для обеспечения прочности контакта необходимо затратить внешнюю энергию (тепловую или механическую), либо использовать введение поверхностно-активных веществ полярного строения, способных к взаимодействию своими функциональными группами и с твердой фазой, и с жидкостью. Изменение энтальпии $\mathrm{d}H$ и внутренней энергии $\mathrm{d}U$ связаны формулой для изменения энтальпии системы:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V, \tag{5.45}$$

а изменение свободной энергии системы и изменение энтальпии связаны уравнением:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}H - T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V, \tag{5.46}$$

где p – давление; $\mathrm{d}V$ – изменение объема.

Изменение энергии Гиббса $\Delta G(P=\mathrm{const})$ и изменение энергии Гельмгольца $\Delta F(V=\mathrm{const})$ между собой связаны соотношением:

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}H - T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V - T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}F + p\,\mathrm{d}V. \tag{5.47}$$

Адгезия является самопроизвольным процессом, в результате протекания которого система стремится к уменьшению поверхностной энергии. Изменение энергии Гиббса и работа адгезии W_a связаны между собой уравнением Дюпре, отражающем закон сохранения энергии при адгезии:

$$\mathrm{d}G = W_a = \sigma_{\text{жг}} + \sigma_{\text{тг}} - \sigma_{\text{жт}}, \tag{5.48}$$

где σ_{ij} – поверхностные натяжения на границах раздела соответствующих фаз.

Процесс адгезии завершается межмолекулярным взаимодействием контактирующих фаз, что соответствует минимальной поверхностной энергии. Уравнение Дюпре самостоятельно почти не используется для расчета работы адгезии из-за трудности определения поверхностного натяжения твердых тел на границе с газом и жидкостью.

Удобную формулу для расчета этой величины можно получить сочетанием законов Дюпре и Юнга:

$$W_a = (1+\cos\theta)/\sigma_{\text{жг}}, \tag{5.49}$$

где θ – краевой угол (угол смачивания).

Так как адгезия жидкости обусловлена молекулярным взаимодействием, возникающим на границе раздела фаз «жидкость – твердое тело», то работу адгезии можно определить не только с помощью формулы (5.49), но и на основе молекулярной природы адгезионного взаимодействия. Работа, необходимая для преодоления молекулярного взаимодействия двух плоских твердых поверхностей, может быть подсчитана по формуле:

$$W_a = -A/(12\pi H^2), \tag{5.50}$$

где A – константа молекулярного взаимодействия или константа Ван-дер-Ваальса (для взаимодействия слоя воды с твердой поверхностью A = (2,0-2,5)·10^{-19} Дж; H – расстояние между телами, м.

Формулу (5.50) можно применять для определения работы адгезии жидкости к твердому телу, но она получена на основе предположения, что адгезия определяется молекулами, находящимися на поверхности граничных фаз. С учетом межмолекулярного взаимодействия не только поверхностных, но и глубинных молекул, Дерягиным получена формула для расчета адгезии жидкости с твердой поверхностью:

$$W_a = -0{,}6A/(\pi H^2), \qquad (5.51)$$

где A=(2,0–3,0)·10^{-21}Дж.

Эта формула более точно определяет адгезионное взаимодействие жидкостей с твердыми поверхностями с учетом дисперсионных сил.

Молекулярные силы, действующие на расстояниях 10^{-8} –10^{-9} м обладают энергией связи порядка (0,04–4) КДж/моль. Энергетический уровень молекулярных сил значительно ниже уровня сил химической связи (40–400 КДж/моль), действующих на расстояниях между атомами и ионами до 10^{-10} м. Молекулярные силы отличаются от валентных еще и тем, что они не связаны с переходом электронов от одного партнера к другому и поэтому не обладают характерным для химической связи свойством насыщаемости. Поле одного диполя может одновременно влиять на поля нескольких соседних диполей и наоборот.

Молекулярные силы обусловлены, в основном, следующими тремя видами взаимодействия молекул:

– ориентационным (эффект Кизома), возникающим при электростатическом взаимодействии полярной молекулы с поверхностью твердого тела, молекулы которого обладают ионной или ковалентной полярной связью;

– индукционным (эффект Дебая), возникающим при взаимодействии полярной молекулы с поверхностью твердого тела, молекулы которого связаны ковалентной неполярной или металлической связью;

– дисперсионным (эффект Лондона), возникающим при взаимодействии электронов соседних атомов и молекул.

Вклад различных взаимодействий в формирование адгезии неодинаков и относительное значение каждого из этих взаимодействий определяется свойствами взаимодействующих фаз. А.Д. Зимон отмечает ведущую роль в процессе адгезионного взаимодействия жидкости дисперсионной компоненты молекулярных сил.

Анализ процесса адгезионного взаимодействия жидкой и твердой фаз показывает, что уменьшение зазора между частицами твердой фазы, взаимодействующими через прослойки жидкой фазы, приводит к уменьшению свободной энергии системы, а следовательно, к повышению устойчивости дисперсной системы.

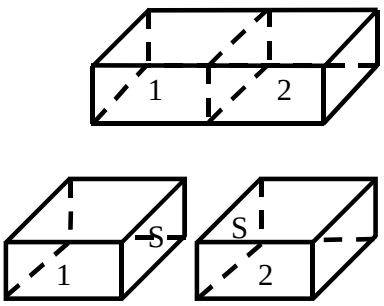


Рис. 5.12 – Приращение поверхностной энергии при разделении тела на части

Толщина прослоек жидкости предопределяет связность материалов после придания им конечной формы будущего готового изделия.

К понятию о поверхностной энергии можно подойти еще следующим путем. Возьмем какое-нибудь тело (рис. 5.12) и обозначим его полную, т.е. внутреннюю и поверхностную, энергию через U. Разделим мысленно тело какой-либо плоскостью на две части и обозначим через U_1 полную энергию первой части, через U_2- второй части. Тогда можно написать:

$$U = U_1 + U_2 \tag{5.52}$$

Если теперь разделим тело на две части, то для этого мы должны затратить некоторую энергию, в результате появятся две новые поверхности с площадью S каждая. Теперь уже полная энергия двух частей будет на U_{12} меньше чем полная энергия целого тела:

$$U' = U_1 + U_2 - U_{12} \tag{5.53}$$

Именно $U' < U$, так как под внутренней энергией мы условились подразумевать ту работу, которую необходимо затратить, чтобы тело разделить на частицы и удалить их друг от друга на такие расстояния, чтобы между ними не было взаимодействия. Часть работы U_{12} мы уже затратили на это разделение. Обозначив через σ поверхностную энергию вновь образованной поверхности, имеем:

$$U_{12} = 2S\sigma, \tag{5.54}$$

откуда

$$\sigma = \frac{U_{12}}{2S}. \tag{5.55}$$

Из этого мы видим, что поверхностную энергию σ можно рассматривать или как избыток энергии на единицу площади, или как силу, которую необходимо приложить к единице длины, чтобы разорвать поверхностный слой. В учении о жидкостях принято второе толкование, и поэтому поверхностная энергия называется чаще поверхностным натяжением.

Рассмотрим более подробно, что происходит на границе соприкосновения двух фаз. Если соприкасаются две фазы, например, твердое тело соприкасается с жидкостью, жидкость соприкасается с газом и т.д., то между этими фазами образуется поверхностный слой. В этом слое сосредоточивается некоторый избыток энергии. Поверхностный слой состоит из двух слоев; один слой принадлежит первой фазе, другой слой принадлежит второй фазе. Каждый из этих слоев занимает определенный объем. И вот если мы энергии этих двух слоев рассчитаем без учета поверхностного слоя, исходя только из объемов, то оказывается, что наши расчеты будут неверны, сумма энергий двух соприкасающихся слоев будет больше, чем сумма энергий без учета этого поверхностного слоя.

Допустим, что соприкасаются две фазы. Обозначим энергии первой и второй фаз без учета поверхностных явлений, т. е. при условии, что обе фазы вполне однородны до геометрической поверхности раздела, через U_1 и U_2; площадь соприкосновения фаз обозначим через S; тогда энергия системы

$$U = U_1 + U_2 + \sigma S, \tag{5.56}$$

откуда

$$\sigma = \frac{U - (U_1 + U_2)}{S} = \frac{U_S}{S}, \tag{5.57}$$

где σ есть избыток энергии, рассчитанной на единицу площади соприкосновения. Этот избыток на 1 м^2 и называется удельной поверхностной энергией.

Величина поверхностной энергии U_S может быть названа сгущением энергии в поверхностном слое. На рисунке 5.13 эта поверхностная энергия изображена заштрихованной площадью. Чем же обусловлено это сгущение энергии на границе соприкосновения двух фаз? В объемах фаз молекулярные силы, действующие на молекулу со стороны соседних молекул, взаимно компенсируются и дают равнодействующую, равную нулю. В поверхностном слое такой компенсации нет, и на поверхностные молекулы действуют силы, направленные внутрь наиболее полярной фазы. Эти силы компенсируются тем, что происходит сжатие поверхностного слоя, и силы упругости производят компенсацию. Поверхностный слой находится в упруго напряженном состоянии и это вызывает сгущение энергии. Поверхностная энергия U_S измеряется той работой, которая необходима для обратимого и изотермического образования поверхностного слоя; она равна σS. Зная удельную поверхностную энергию σ, мы можем по уравнению Гиббса-Гельмгольца вычислить полную поверхностную энергию, т.е. сгущение полной энергии в поверхностном слое:

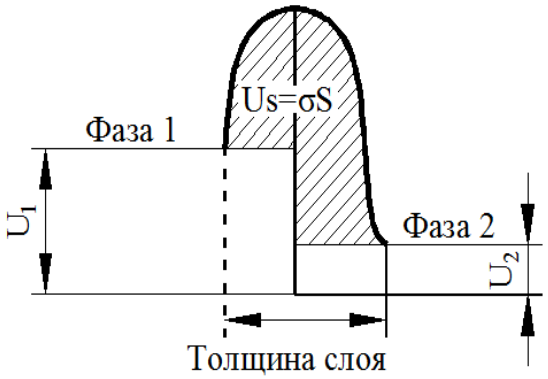


Рис. 5.13 – Схема сгущения энергии на поверхности раздела двух фаз

$$U_S = \sigma - T\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \sigma + Q_S, \tag{5.58}$$

где U_S – увеличение полной энергии системы в изотермическом и обратимом процессе увеличения поверхности раздела на 1 м^2. Это увеличение энергии состоит из двух частей:

1) σ – работы образования 1 м^2 поверхности раздела;

2) $Q_S = -T(\partial\sigma/\partial T)$ – скрытой теплоты при образовании 1 м^2 этой поверхности.

Поверхностная энергия твердых тел падает с повышением температуры, т.е., можно записать:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} < 0, \qquad -\frac{\partial \sigma}{\partial T} > 0 \quad \text{и} \quad Q_S > 0. \tag{5.59}$$

Это означает, что в процессе изотермического обратимого образования 1 м^2 поверхностного слоя из внешней среды поглощается положительное количество теплоты Q_s. Если же такого притока теплоты нет, то температура поверхностного слоя при его образовании должна падать. Удельная свободная поверхностная энергия на границе двух фаз определяется разностью их полярностей, т. е. различием в интенсивности действующих в них молекулярных сил. За меру разности полярностей двух соприкасающихся фаз можно принять работу изотермического переноса одной молекулы из одной фазы в другую.

Представления о поверхностной энергии тел непосредственно связаны с процессом образования новой поверхности при разрушении материалов как по границе взаимодействия двух фаз (преодоления прочности адгезии), так и по внутренней поверхности однородного материала (преодоление прочности однородных материалов).

5.9 О СЕЛЕКТИВНОСТИ ПРОЦЕССА ДЕЗИНТЕГРАЦИИ

Термин «селективность» применительно к процессам дезинтеграции неоднозначно трактуется разными учеными. Селективность произошло от латинского selektio, что означает выбор, отбор, избирательность. В настоящее время понятие селективности измельчения крепко вошло в теорию и практику обогащения полезных ископаемых. Идея селективной дезинтеграции горных пород заключена в том, что надо разрушать многокомпонентные тела по поверхностям раздела фаз, причем с минимальными энергозатратами. Различают *геометрическую селективность* разрушения, при которой происходит отделение части минерального вещества горной породы, обладающей определенным составом и структурой строения, отличающими её от других фаз, и ограниченную от них поверхностью раздела (при переходе через эту поверхность раздела какие-то свойства минерального вещества меняются), и *энергетическую селективность*.

Уровень геометрической селективности разрушения определяется соотношением площадей частей новой поверхности, «полезной», то есть характеризующей средний уровень раскрытия рудных фаз, и «избыточной», то есть характеризующей раскол рудных масс и измельчение пустой породы. С энергетической точки зрения образование и той и другой части новой поверхности есть процесс упорядоченного преобразования энергии, поступающей от внешних источников. Разрушение называется *энергетически селективным*, если подводимая энергия расходуется только на образование новой поверхности. Энергетическая проблема состоит в том, что подавляющая часть подводимой энергии диссипирует и не идет на образование ни «полезной», ни «избыточной» поверхности.

Впервые термин «селективное измельчение» начал обсуждаться на Европейском совещании по измельчению во Франкфурде 1962 году. Р.П. Гарднер и Л.Г. Аустин в своих докладах дали определение селективной функции как весовой части частиц определенного размера, подвергшихся измельчению за еди-

ницу измельчающего воздействия. При этом под селективностью они понимали такую избирательность измельчения, при которой не все частицы сыпучего материала, находящегося в рабочем пространстве измельчающей машины, разрушились после однократного силового воздействия.

Т. Танака исследовал помол двухкомпонентной смеси, которая состояла из «более мягкого» и «более твердого» компонентов. Он установил, что скорости образования новой поверхности для этих компонентов различны и получил аналитическую зависимость, названную степенью избирательного измельчения

$$\eta = \frac{HG}{1 + HG}\ , \qquad (5.60)$$

где $H = H_н / H_S$ – относительная плотность по Моосу, индекс H соответствует более твердому компоненту, S – более мягкому;

$G = \exp[-(H-1)^n]$ – относительная размалываемость компонентов. Танака считал основой избирательного измельчения *разнопрочность* компонентов, входящих в состав материалов, подвергающихся измельчению.

Исследователи С.Ф. Шинкаренко и Л.И. Нечаева развили понятие селективности, предложенное Т. Танакой. Задачей их исследования было установление диапазонов нагрузок, при которых процесс разрушения будет протекать наиболее избирательно.

Таким образом, сформировалось два толкования селективности: селективная дезинтеграция, когда не все частицы подвергаются разрушению при единичном нагружении и, селективная дезинтеграция, при которой образование новой поверхности происходит по границам поверхностного взаимодействия компонентов в частицах. Первое применимо для простых по составу сыпучих материалов, второе – для сыпучих полиморфных сред. Применительно к объектам растительного происхождения наиболее характерна геометрическая селективность, то есть селективное разрушение частиц по поверхностям взаимодействия различных морфологических структур в частицах.

Резюмируя раздел 5.9 следует сделать вывод: всякий процесс дробления или измельчения селективен, но эта селективность может быть либо энергетической, когда не все частицы в рабочей зоне разрушаются при единичном силовом воздействии и проявляется масштабный фактор, либо геометрической, когда образование новой поверхности происходит по границам поверхностного адгезионного взаимодействия между морфологическими структурами в частицах материала.

5.10 Классификация и моделирование растительного сырья с позиции селективной дезинтеграции

Подход к разрушению растительного сырья с позиций селективной дезинтеграции требует по-новому рассмотреть строение объектов переработки.
Анализ морфологии и состава растительного сырья различных видов позволил выявить наличие или отсутствие внутренней структурной связи между морфо-

логическими структурами. Классификация растительного сырья представлена на рисунке 5.14. В основу градации растительных объектов положено два признака: анатомически-морфологический (правая часть схемы) и характер связности морфологических структур (левая часть схемы). Окончания СП, СБ и Н связывают две части схемы воедино. Приняты обозначения: несвязные (Н), связные поверхностными или структурными белками (СБ) и связные полисахаридами – в первую очередь – пектином (СП). Проведенная классификация позволяет создать модели объектов селективной дезинтеграции в виде двукомпонентных структур, связных или несвязных друг с другом. Объекты измельчения как материалы биологического происхождения, как было рассмотрено в главе 1, представляют собой чаще всего бикомпонентные тела, состоящие из разнопрочных структурных элементов, поверхностно связанных или несвязанных друг с другом.

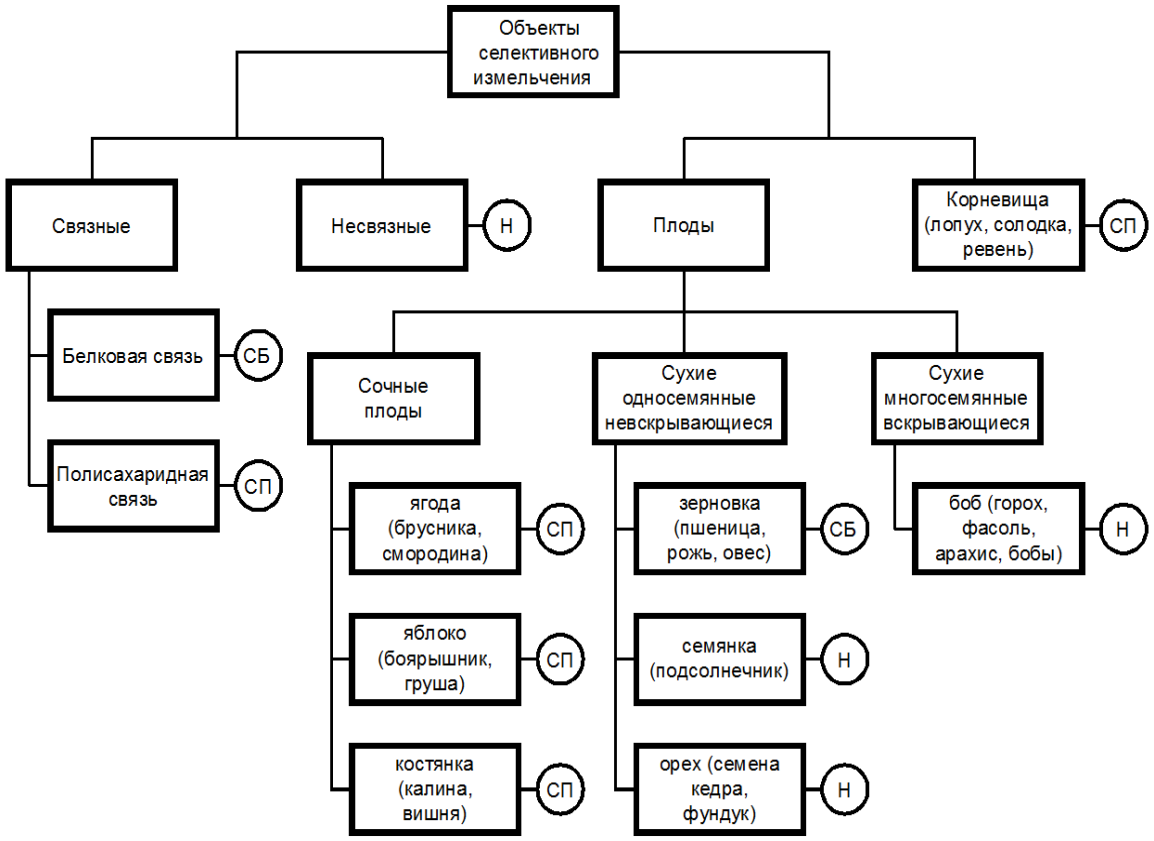


Рис.5.14 – Классификация растительного сырья с позиции селективной дезинтеграции

Рассмотрим различные формы существования компонентов в растительном сырье (рис. 5.15 а, б). В первом случае отдельные морфологические структуры объектов разрушения не имеют поверхностной связи между собой (рис. 5.15 а). Примером могут служить семена растений, имеющих твёрдую оболочку (семена подсолнечника, кедровые орехи и подобные им). Структурно-механические свойства ядра *2* и оболочки *1* различны. Идеальным протеканием

процесса селективной дезинтеграции является разрушение внешнего компонента (оболочки) при сохранении целостности другого (ядра).

В другом случае анатомические части компонентов *1* и *2* находятся в связном состоянии (рис. 5.15 б). К таким материалам относятся семена злаковых, стебли, корневища и прочие. Связь компонентов в материале слабее их прочности. Разрушение будет происходить по границам поверхностного взаимодействия различных морфологических структур.

Для эффективной механической дезинтеграции как связного, так и несвязного растительного сырья из анализа способов механического воздействия, наиболее перспективными являются виброимпульсный для единичных тел и виброинерционный – для слоя сыпучей среды. Виброимпульсное воздействие на измельчаемый материал существенно увеличивает эффект раскрытия трещин, что повышает вероятность разрушения частиц именно по границам поверхностного взаимодействия компонентов.

Особенностью вибрационного измельчения является также возможность широкого и раздельного варьирования ударного (регулирование параметров вибрации) и истирающего факторов (изменение формы колебаний, конструктивного исполнения рабочей камеры и т. д.).

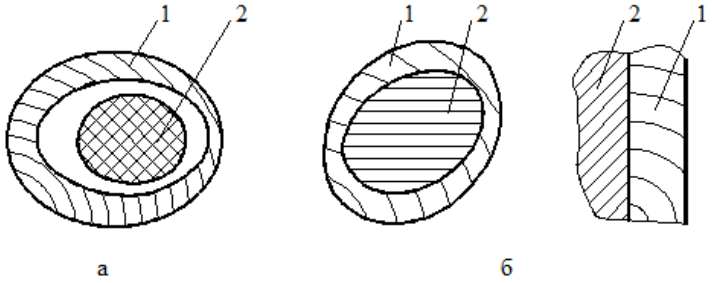


Рис. 5.15 – Структурные состояния компонентов в растительном сырье: а – несвязные; б – связные: 1, 2 – компоненты сырья

При виброинерционном способе разрушение материала в слое осуществляется при заданной и, что особенно важно, легко регулируемой с высокой точностью нагрузке в условиях интенсивного вибрационного воздействия. Это становится возможным благодаря устранению жесткой кинематической связи между матрицей и пуансоном и замене принципа заданности деформации слоя принципом заданности силы и цикличности ее воздействия. В этом случае деформация слоя определяется его сопротивлением разрушению и величиной заданной силы. Интенсивное вибровоздействие на слой материала способствует постоянной интенсивной переориентации его частиц относительно друг друга в рабочей зоне, что приводит к накоплению миеродефектов в зоне поверхностной связи между компонентами в частицах, повышает вероятность разрушения всех ослабленных зон в объеме каждой частицы, а также ускоряет удаление скапливающейся между кусками мелочи, уменьшая тем самым потери энергии и переизмельчение, характерные для других вариантов разрушения в слое. К тому же замена кинематических связей динамическими дает возможность селективно настраивать работу машины на ту или иную прочность, например адгезионную прочность между морфологическими структурами или на прочность легкораз-

рушаемого компонента при максимальном сохранении целостности более прочного.

5.11 Анализ напряженных состояний моделей двукомпонентных тел, содержащих поверхность адгезионного взаимодействия

Модели двукомпонентных тел созданы на основе анализа строения растительных тканей – стеблей, плодов, корневищ. Все морфологические части растений имеют определенные геометрические формы, которые были классифицированы как бикомпонентные тела с различным расположением фаз. Модели объектов селективной дезинтеграции представлены на рисунке 5.15.

Рассмотрим напряженное состояние деформированного двухкомпонентного сферического тела при различном положении границы раздела по отношению линии действия нагрузки P (рис. 5.16).

Будем считать, что компоненты тела проявляют упругие свойства, но обладают различными модулями упругости первого и второго рода, соответственно E_1, G_1 и E_2, G_2. Тело деформируется нагрузкой P на величину относительной деформации ξ. Условимся, что деформирование не приводит к разрушению каждого из компонентов, а напряжения адгезионного взаимодействия при разрушении меньше предельных напряжений каждого из компонентов. Адгезионная прочность W_n, проявляющаяся как напряжения, возникающие при действии нагрузки P вдоль границы взаимодействия компонентов (рисунок 5.16 а)

определится выражением:

$$W_n = \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} = \xi(E_1 + E_2), \tag{5.61}$$

Когда нагрузка P прилагается перпендикулярно границе раздела компонентов (рисунок 5.16 б), то возникают касательные напряжения отрыва (сдвига), вызванные разницей относительного удлинения компонентов ξ_1 и ξ_2, которые по своей сути являются адгезионной прочностью при сдвиге:

$$W_\tau = \sigma_{p_2} - \sigma_{p_1} = E_2\xi_2 - E_1\xi_1, \tag{5.62}$$

причем, чем ближе к центру тела, тем меньше будет величина относительной деформации и, следовательно, касательных напряжений отрыва W_τ. Такой характер нагружения является наименее эффективным, и создание высоких значений W_τ возможно, только при значительной разности прочностных и деформационных характеристик компонентов как, например, для гигротермически обработанного зерна. В тоже время, такое нагружение совершенно не гарантирует образование новой поверхности, если адгезионная связь является биополимерной.

Действующее во времени давление приведет к образованию новых адгезионных связей, не менее прочных, чем прежние.

Третий случай нагружения, наиболее часто встречаемый в практике дробления и измельчения, характеризуется направлением действия нагрузки P

под углом φ к поверхности контакта (рисунок 5.16 в). Деформирование тела при таком приложении нагрузки носит упруговязкий характер.

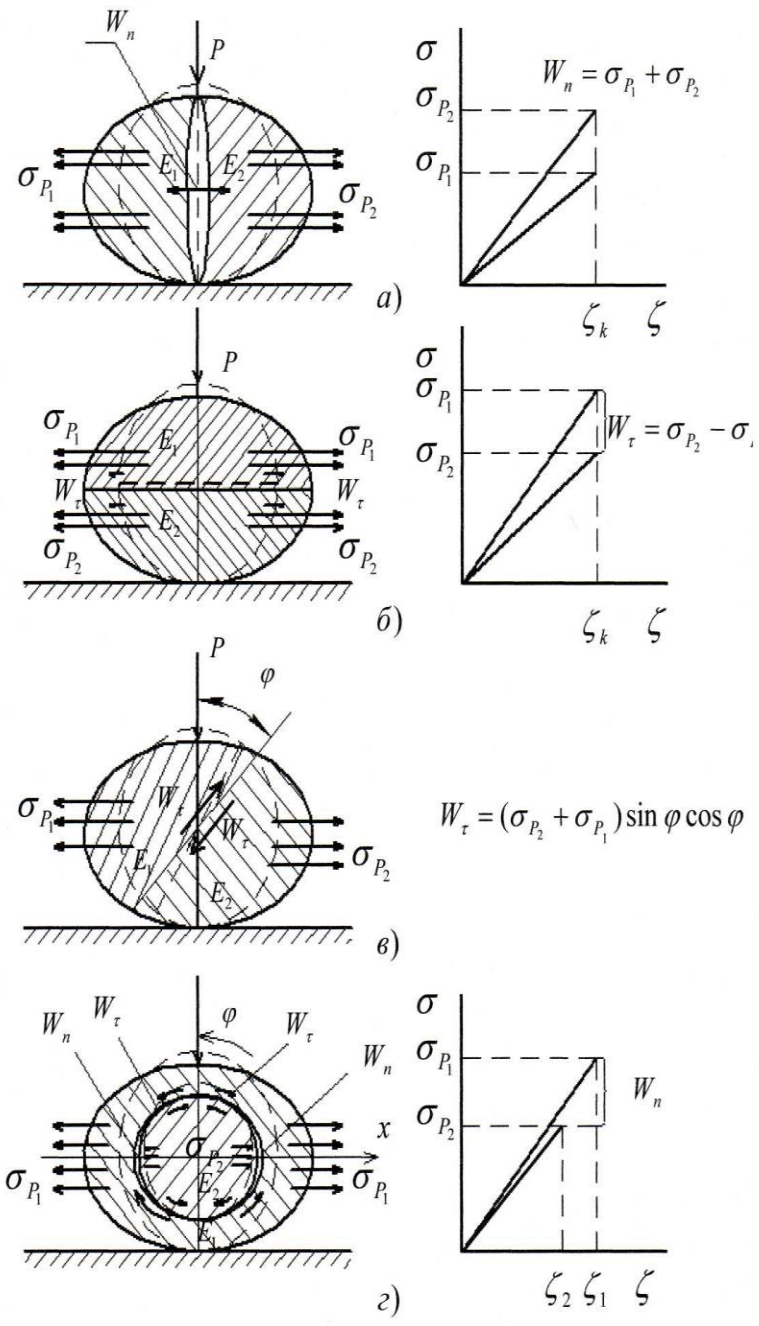


Рис. 5.16 – Принципиальные схемы создания напряжений растяжения и сдвига на границе адгезионного взаимодействия двух компонентов

Упругость обусловлена прочностными свойствами компонентов, а вязкость – сдвиговым течением на границе их взаимодействия. Для определения касательных напряжений отрыва W_τ по поверхности адгезионного взаимодействия компонентов воспользуемся критерием Келли-Девиса для анизотропных полимерных материалов:

$$W_\tau = \sigma_\varphi \sin\varphi \cos\varphi, \qquad (5.63)$$

где σ_φ – напряжения растяжения в плоскостях, прилегающих к границе раздела компонентов.

С учетом (5.61) запишем:

$$W_\tau = \left(\sigma_{p_1} + \sigma_{p_2}\right)\sin\varphi\cos\varphi,$$

или

$$W_\tau = \xi\left(E_1 + E_2\right)\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (5.64)$$

Далее перейдем к рассмотрению двухкомпонентного тела, для которого границей раздела является сфера или цилиндр (рисунок 5.16 г). Такая модель тела наиболее приближена к реальным формам многих природных объектов (например, семена злаковых и других видов растений, обладающих оболочками). В областях адгезионного контакта, максимально удаленных от линии действия силы P, возникают напряжения нормального поверхностного взаимодействия, причем возможны три варианта изменения начального равновесного состояния:

1) $\xi_1 > \xi_2$ – относительное удлинение внешнего компонента больше, чем внутреннего. Тогда:

$$W_n = \sigma_{p_1} - \sigma_{p_2} = E_1\xi_1 - E_2\xi_2. \qquad (5.65)$$

2) $\xi_1 \approx \xi_2$ – относительные удлинения примерно равны. Тогда $W_n \approx 0$;

3) $\xi_1 < \xi_2$ – в этом случае внутренний компонент оказывает давление на внешний и никакого разрыва в границе контакта не возникает.

В областях поверхностного контакта участков, равноудаленных от линии действия силы, возникают касательные (сдвиговые) напряжения, причем они будут иметь место только при соблюдении условия $\xi_1 \neq \xi_2$ и определяются выражением:

$$W_\tau = \left(\sigma_{p_1} - \sigma_{p_2}\right)\sin\varphi\cos\varphi \qquad (5.66)$$

Напряжения отрыва или сдвига по границе контакта двух твердых фаз направлены на преодоление сил межмолекулярного взаимодействия разнородных сред. Работа на преодоление адгезии, как приращение энергии свободной поверхности по границе взаимодействия различных по природе материалов, рассмотрена в разделе 5.8.

5.12 Трансформация энергии при деформировании и разрушении двухкомпонентных тел

Рассмотрение физической сущности процесса селективного разрушения невозможно без создания обобщенной модели трансформирования подводимой к телу энергии при его деформировании и разрушении. Примем допущение, что вся кинетическая энергия рабочего органа передается разрушаемому телу без учета затрат на придание кинетической энергии исходным частицам материала и осколкам, затрат на трение и прочие. В разработанной модели учтены:

– процесс накопления телом потенциальной энергии упругой деформации с учетом различия прочностных свойств компонентов;

– процесс накопления потенциальной энергии на границе адгезионного взаимодействия компонентов;
– процесс поглощения потенциальной энергии при образовании новой поверхности по границе раздела компонентов и их разрушение;
– тепловое рассеяние энергии, как при деформировании, так и при образовании новой поверхности.

Структура идеализированной модели показана на рисунке 4.5. В модели приняты следующие обозначения функциональных элементов:

1) K – элемент, описывающий кинетическую энергию рабочего органа;

2) $П_E$ – элемент, описывающий накопление энергии упругой деформации (уравнения 4.10 и 4.16);

3) Q_E – элемент, характеризующий потери на тепловое рассеяние при вязкоупругой релаксации;

4) ΔG – элемент, характеризующий затраты на изменение поверхностной энергии взаимодействия компонентов (на основе уравнения 2.40);

5) $A_{1\text{-}2}$ – элемент, учитывающий переход подводимой энергии в энергию образования новой поверхности по границе раздела твердых фаз (выражение 4.18);

6) $Q_{\Delta S_{1-2}}$ – элемент, характеризующий тепловое рассеяние при образовании новой поверхности;

7) A_1+A_2 – элемент энергии образования новой поверхности при разрушении самих компонентов, может быть определен из законов Бонда, Кирпичева – Кика, Ребиндера, подходящих для данного случая разрушения;

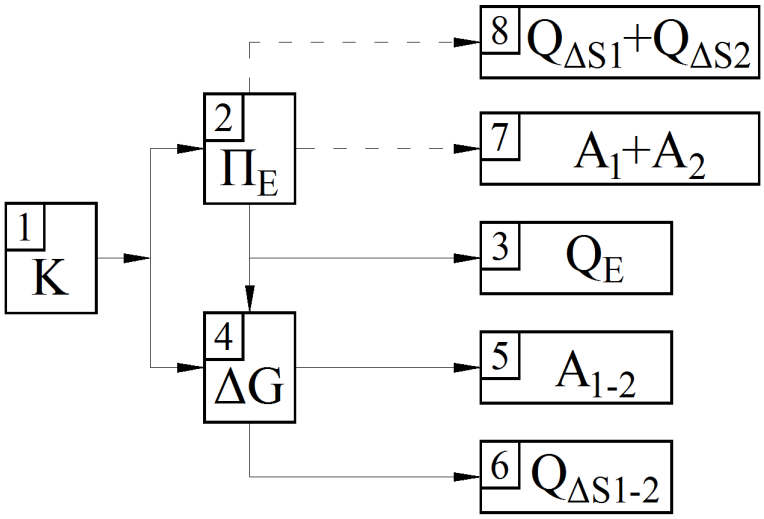


Рис. 5.17 – Обобщенная модель трансформирования энергии при селективной дезинтеграции

8) $Q_{\Delta S_1} + Q_{\Delta S_2}$ – тепловые потери при разрушении компонентов.

Пунктирными линиями в модели представлены элементы, наличие которых в реальном процессе селективной дезинтеграции можно избежать.

В модели трансформирования энергии при селективной дезинтеграции на основе термодинамического подхода показана взаимосвязь различных видов

энергий. На основе представлений об адгезионной природе прочности растительной ткани можно провести обобщение: Всякое внешнее силовое воздействие на дисперсную систему, приток внешней механической энергии изменяет ее термодинамическое состояние. Однако система стремится снова перейти к состоянию равновесия, перейти к минимуму свободной энергии, преобразуя внешнюю энергию в различные виды энергии поверхностных взаимодействий, в том числе – энергию вновь образованной поверхности и теплоту.

5.13 Структурная прочность и механические свойства биологических тканей и продуктов на их основе

5.13.1 Микроструктура и состав растительной ткани

Сырье, используемое в пищевой промышленности, относится к объектам биологического происхождения. Растительные ткани состоят из клеток, строение которых почти не изменилось с момента их возникновения. Процессы, происходящие в клетках, подчиняются общим законам физики и химии. Согласно первому закону термодинамики энергия для клеточной работы не может создаваться из ничего и исчезать бесследно. Клетка подчиняется и второму закону термодинамики – в ней последовательно возрастает энтропия и происходит «разупрочнение» структуры, но по сравнению с неживыми структурами скорость возрастания энтропии минимальна. Основными частями любой клетки являются ядро и цитоплазма, составляющие вместе протопласт. Однако в отличие от животной растительная клетка имеет особенности, связанные с автотрофным питанием и специфическим образом жизни. К числу таких отличий относятся клеточная стенка, большая центральная вакуоль, пластиды, плазмодермы. Особое образование на поверхности протопласта, продукт его деятельности – клеточная стенка, содержащая два компонента: более или менее однородный рыхлый матрикс и прочную арматуру в нем. Расположение арматурных элементов имеет свои особенности: в ближней к протопласту зоне оно отражает ориентацию специфических клеточных элементов – микротрубочек, в более удаленных слоях арматурные элементы располагаются хаотично.

Основой химического состава клеточной стенки являются полисахариды. Средний состав первичной клеточной стенки высших растений таков: целлюлоза – 25 % от сухой массы, пектиновые вещества – 30, гемицеллюлозы – 40, белки и другие вещества – 5 % .

Целлюлоза – основное вещество арматуры – представляет собой высокомолекулярный полимер β-глюкозы, молекулы которой соединены между собой 1-4-гликозидными связями со степенью полимеризации 8-12 тыс. Около 100 молекул целлюлозы ассоциируются в мицеллы, мицеллы формируют «веревочки» – микрофибриллы, а последние «канаты» – фибриллы.

Матрикс состоит из пектиновых веществ и гемицеллюлоз. Пектиновые вещества – это главным образом полимеры галактуроновой кислоты. Особую роль в связывании этих молекул играет кальций, взаимодействующий с их кар-

боксильными группами. Гемицеллюлозы – сложные полимеры различных моносахаридов: арабинозы, маннозы, ксилозы и др. Если пектиновые вещества придают матриксу высокие гидрофильные свойства, то гемицеллюлозы, связываясь с целлюлозными структурами, закрепляют их специфическую организацию. В клеточной стенке присутствуют белки: во-первых, это ферменты, участвующие в ее синтезе, во-вторых, белки, защищающие клетку от инфекции путем разрушения оболочки и самой клетки патогена (хитиназы, протеазы). Для клеточной оболочки специфичен белок экстензин, богатый аминокислотой пролином.

Некоторые клетки формируют вторичную клеточную стенку. Она превосходит первичную по плотности и отличается по химическому составу. В зависимости от функций клеток конкретных тканей (проводящей, защитной, механической) доля целлюлозы может возрастать до 60 % и более. Кроме того, во вторичной клеточной стенке могут находиться вещества, усиливающие ее изолирующие свойства и прочность, — лигнин, суберин, минеральные соли.

Химический состав и структура клеточной стенки определяют ее важнейшие свойства — прочность, эластичность, высокую гидрофильность.

Функции клеточной стенки значительны и разнообразны.

1. Опорная функция – благодаря ей клетка поддерживает свою форму и размеры.

2. Защитная функция препятствует проникновению в протопласт частиц, способных его повредить, а также патогенных микроорганизмов.

3. Буферная функция. В полисахаридной оболочке может сосредоточиваться до 30 % ее содержания в клетке; при водном дефиците она может использоваться протопластом.

4. Транспортная функция осуществляет диффузионное передвижение гидрофильных веществ по насыщенному водой матриксу.

Кроме клеточных стенок в диффузионном движении воды и растворенных в ней веществ участвуют межклетники. Клеточные стенки и межклетники вместе образуют так называемое свободное пространство – апопласт, составляющее 10-15 % объема растительной ткани. Часть этого пространства способна адсорбировать различные ионы за счет электростатических взаимодействий последних с компонентами клеточных стенок. Этот объем называется доннановским свободным пространством.

Растительные и животные ткани являются дисперсными системами, дисперсная фаза которых – клетка – поверхностно взаимодействует с дисперсионной средой – межклетниками, а также непосредственно клеточными стенками, которые покрыты мембранами. Строение мембраны жидкостно-мозаичное, основу мембран составляет двойной слой молекул фосфолипидов. Гидрофильные остатки фосфолипидов обращены наружу, а гидрофобные – внутрь. Мембрана содержит белки: периферийные и внутренние (интегральные). Периферийные белки электростатическими силами прикреплены к полярным концам фосфолипидов и покрывают липиды мозаично. Мембрана служит защитой клетки и в силу своей организации является весьма прочной структурой. Белки являются

активными компонентами биологических мембран, а также обеспечивают адгезию клеток.

Межклеточные пространства заполнены органическим веществом, которое скрепляет клетки между собой. Состав этого вещества зависит от природы растительной ткани, ее нахождения в тех или иных морфологических структурах растения, но всегда в межклетниках находятся либо белки, либо пектины как связующие вещества растительной ткани. Между периферийными белками мембран клеток и веществами межклетников существуют устойчивые межмолекулярные связи, в которых непосредственно участвуют молекулы воды.

Пектин – водорастворимое вещество, состоящее из частично или полностью метоксилированных остатков полигалактуроновой кислоты. Молекула пектина состоит из «гладких» линейных участков и разветвленных фрагментов. Структура и химический состав пектиновых веществ определяют пространственную форму их молекул и характер взаимодействия с другими соединениями. Пектины обладают структурой с ограниченной гибкостью, стабилизируемой водородными и гидрофобными связями. Растворимый пектин находится в межклеточных слоях ткани зрелых плодов. Молекулы пектина в воде легко ассоциируются друг с другом, либо с крупными молекулами сопутствующих веществ. Так же, как и в случае с белком, пектин устанавливает с соседними молекулами водородные связи.

В пищевых вязко-пластичных продуктах и полуфабрикатах, содержащих белки или пектины, а таких – подавляющее большинство, именно эти биополимеры определяют прочность поверхностного взаимодействия – адгезию и когезию. П.А. Ребиндер относил белки к группе структурообразующих ПАВ с эффективным стабилизирующим действием по отношению к дисперсным системам различной природы. Подобную же функцию природа отвела и пектинам.

Объекты переработки растительного происхождения, чаще всего, в нативном состоянии представляют собой коагуляционные дисперсные системы, влага в которых находится во всех формах связи с макромолекулами биополимеров. Механическое обезвоживание либо сушка создают условия для перехода структур из коагуляционных, когда поверхностное взаимодействие микроструктур, в частности – растительных клеток, осуществляется адгезионно (дисперсная фаза – дисперсионная среда), в конденсационно-кристаллизационные. То есть прочность обезвоженного растительного сырья определяется когезионным поверхностным взаимодействием его макроструктур и «кирпичиков» (опять же – частично обезвоженных растительных клеток). Но поверхностные белки клеточных мембран могут взаимодействовать с белками соседней мембраны как непосредственно, так и с участием молекул воды и веществом межклетников, содержащим белки либо пектины. Следовательно, задача определения внутренней прочности в дисперсных системах растительного происхождения, а также прочности их взаимодействия с поверхностями рабочих органов машин и аппаратов сводится к определению удельной поверхностной энергии дисперсных систем, содержащих биополимеры и влагу в различной концентрации.

Прочность тела растения обеспечивается в той или иной мере всеми его тканями и клетками, живыми и мертвыми. Живые клетки, хотя бы и обладают тонкими нежными стенками, играют значительную роль в силу *тургора* – гидростатического давления внутри клетки, придающего стенке клетки упругость за счет плосконапряженного состояния растяжения.

Наряду с тканями и клетками, играющими в теле растения (как сооружения) роль, аналогичную роли заполнения в железобетонных конструкциях, в растениях имеются ткани и клетки, соответствующие арматуре железобетона: стержням, проволокам, пронизывающим (а иногда и обматывающим) основную массу.

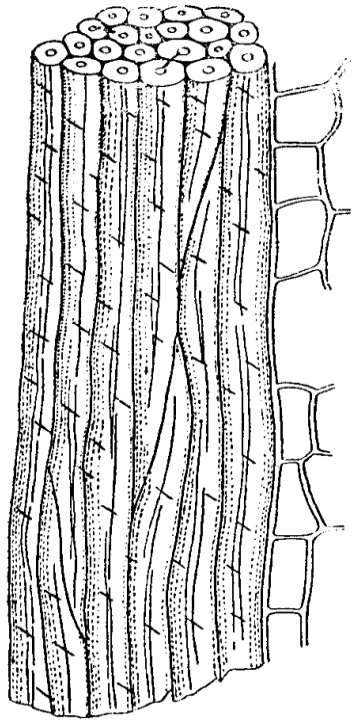


Рис. 5.18 – Часть отпрепарированного пучка склеренхимных волокон в перспективном изображении. Справа несколько паренхимных клеток (из Ротерта)

Ткани и клетки-одиночки подобного рода можно назвать арматурными, или механическими, а совокупность их – арматурой, стереомом, или механической системой.

Арматура растений может быть представлена, нередко уже в пределах одной особи, тремя различными типами тканей и клеток: склеренхимой, колленхимой и каменистыми клетками (склереидами).

Основными чертами строения, характерными для всех типов арматуры, являются: 1) мощное утолщение клеточных стенок; 2) тесное, за редкими исключениями, смыкание между клетками; 3) отсутствие перфораций в клеточных стенках. Сильно утолщенные клеточные стенки арматурных тканей обладают высокими физико-механическими качествами. Располагается арматура в органах растений согласно принципам обеспечения механической прочности с малой затратой материала.

Арматурной тканью, наиболее важной и по распространенности у растений, и по относительной массе материала клеточных стенок, и по значению для прочности растений, является склеренхима – ткань, состоящая из клеток, плотно сомкнутых, прозенхимных (т.е. удлиненных и заостренных на двух противоположных концах), толстостенных, с немногочисленными узкими простыми щелевидными порами, расположенными длинной осью под острым углом к продольной оси клетки (рисунок 5.18). Клетки склеренхимы в технике называют «волоконцами», или «элементарными волокнами». При полном своем развитии клетки склеренхимы обычно не имеют живого содержимого, и полости их заполняются воздухом. К этому времени клеточные стенки в большинстве случаев одревеснеют. Сравнительно редко они остаются неодревеснеющими.

Материал клеточных стенок типичной склеренхимы по прочности на разрыв ($\sigma_{\text{В}}$) и по величине предела упругости ($\sigma_{\text{упр}}$) близок к строительной стали. В отличие от строительной стали, удлинения склеренхимы упруги почти до разрыва, притом они более значительны, чем у стали. В связи с этим у склеренхимы величины модуля упругости (E) гораздо ниже, а величины работы деформации («живого» упругого сопротивления) на единицу объема ($a_{уп}$) выше, чем у стали. По способности противостоять без остающихся деформаций динамическим нагрузкам склеренхима значительно превосходит строительную сталь.

Склеренхима имеется в вегетативных органах почти всех сосудистых растений. В качестве первичной ткани склеренхима (рис. 5.19) в относительно большом количестве содержится в стеблях, листьях и корнях многих однодольных.

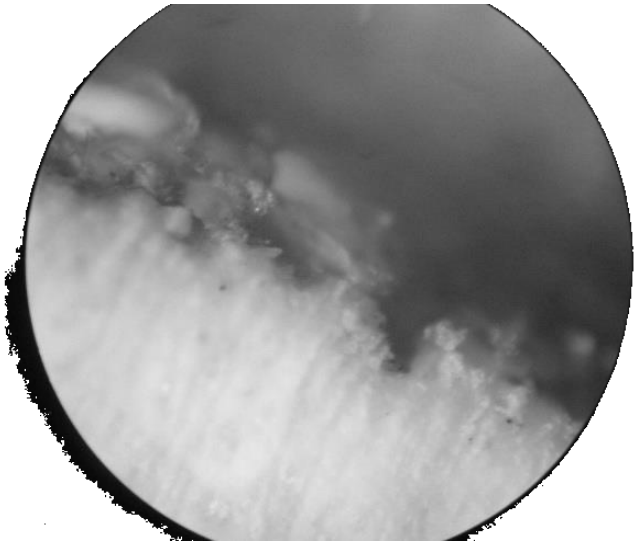


Рис. 5.19 – Периферийные клетки корня лопуха обыкновенного – склеренхима (поперечный срез)

Чрезвычайно богаты склеренхимными тяжами, например, листья многих лилейных, «новозеландского льна», Pnortnium tenax и злаков («эспарто», Stipa lenacissima*)*.У двудольных склеренхима в виде первичной ткани имеется обычно во всех вегетативных органах, но особенно богаты ею стебли во вторичном строении. Склеренхима вторичного происхождения имеется в лубе и в древесине. Склеренхима в лубе называется лубяными волокнами, в древесине — древесинными волокнами, или либриформом.

Колленхима обычно бросается в глаза при рассматривании неокрашенных срезов растений (рис. 5.20), так как клеточные стенки ее обладают сильным лучепреломлением Стенки клеток, как они видны на поперечных разрезах, утолщены весьма неравномерно. Утолщение клеточных оболочек происходит очень рано, когда рост клеток в продольном и в поперечных направлениях еще только начинается. Живое содержимое в клетках колленхимы сохраняется и после того, как они уже дифференцированы. Наряду с этим долго удерживается и способность клеток к росту. Клеточные стенки при довольно значительном

сопротивлении растяжению обладают способностью к деформациям – как упругим, так и остаточным.

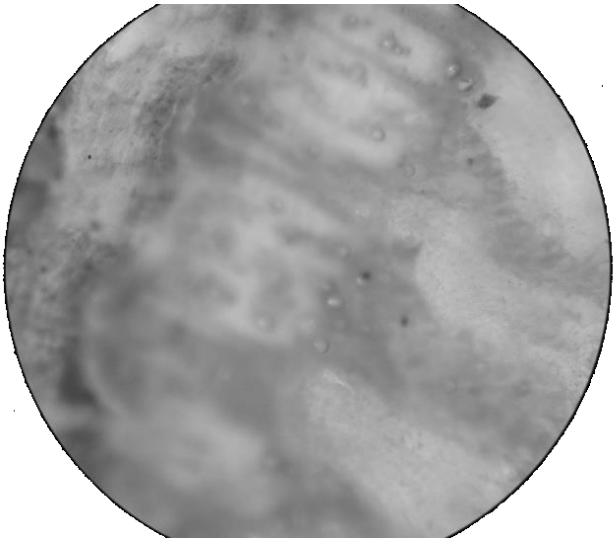


Рис. 5.20 – Клетки колленхимы внутренних слоев корня лопуха обыкновенного - (поперечный срез)

5.13.2 Микроструктура и состав животных тканей

К животным тканям относятся мышечная ткань (мясо), соединительная ткань и ее разновидности, в частности костная ткань и жировая ткань.

Мышечная ткань или мясо относят к структурированным дисперсным системам, для которых характерны высокая структурная вязкость и упругость формы. Мышечная ткань сельскохозяйственных животных содержит 72–75 % воды и 28–25 % сухого остатка, который в свою очередь на 80 % состоит из белковых веществ.

Основным структурным элементом мышечной ткани является мышечное волокно. Мышечные волокна слагаются в первичные мышечные пучки. В пучках волокна разделены тончайшими прослойками соединительной ткани, связанными с волокнами—эндомизием. Эндомизий образован тонкими и нежными коллагеновыми и эластиновыми волокнами, собранными в пучки; свободные пространства между ними заполнены промежуточным веществом.

Строение эндомизия во всех мускулах примерно одинаково. Первичные мышечные пучки объединяются в пучки вторичные и т. Д. Пучки высшего порядка покрыты соединительнотканной оболочкой—перимизием—и в совокупности составляют мускул. Эндомизий и перимизий образуют своеобразный каркас, или строму мышцы. Их прочностные свойства определяют упругость мышечной ткани. В связи с этим в практике их выделяют в особую категорию внутримышечной соединительной ткани.

Мускул также покрыт оболочкой—эпимизием. Перимизий и эпимизий построены из коллагеновых волокон различной структуры и прочности, образующих более или менее сложное сплетение, и содержат различное количество эластиновых волокон. В перимизии и эпимизий мышц некоторых видов откор-

мленных животных находятся жировые клетки, образующие так называемую мраморность на поперечном разрезе мускула.

Мышечное волокно—количественно преобладающая составная часть мышечной ткани. В его состав входят наиболее важные в пищевом отношении вещества. Мышечные волокна при рассматривании под микроскопом показывают поперечно-полосатую структуру. Волокно кажется образованным из правильно чередующихся по его длине темных и светлых участков. Миофибриллы проходят через оба участка.

Основой сарколеммы мышечного волокна является тонкая мембрана, снаружи которой находится сетчатый слой коллагеновых фибрилл. Сарколемма очень прочна. Толщина сарколеммы зависит от диаметра мышечного волокна. Поэтому, чем больше диаметр волокна, тем прочнее мясо. Шестичасовой нагрев при 120 °С не разрушает ее.

Белковые вещества мышечной ткани в первую очередь определяют ее пищевую ценность и важнейшие свойства. Биологическая ценность белковых веществ определяет их способность служить исходным материалом для построения организмом важнейших элементов – тканей, ферментов, гормонов, способных удовлетворить потребность организма в синтезе необходимых ему веществ, наличием в его составе незаменимых аминокислот, и их соотношений. Оценивая питательность белковых продуктов, неоходимо исходить из того, в какой степени соотношение содержащихся в них аминокислот приближается к оптимальному. Биологическая ценность и роль в питании неполноценных белков – *коллагена и эластина* – обусловлена тем, что в определенных соотношениях с другими белками мышечной ткани они могут компенсировать недостающее количество незаменимых аминокислот, содержащихся в них в большом количестве.

Наряду с белками, выполняющими тонкие высокоспециализированные функции, существуют белки, имеющие в основном *структурное значение*. Они обеспечивают механическую прочность и другие механические свойства отдельных тканей живых организмов. В первую очередь это коллаген – основной белковый компонент внеклеточного матрикса соединительной ткани. У млекопитающих коллаген составляет до 25% общей массы белков. Коллаген синтезируется в фибробластах – основных клетках соединительной ткани. Коллаген формируется в виде трех скрученных в спираль полипептидных цепей, которые уже вне фибробластов объединяются в коллагеновые фибриллы диаметром несколько сотен нанометров, а последние – уже в видимые под микроскопом коллагеновые нити.

В *эластичных тканях* – коже, стенках кровеносных сосудов, легких – помимо коллагена внеклеточный матрикс содержит белок *эластин*, способный довольно в широких пределах растягиваться и возвращаться в исходное состояние.

Еще один пример структурного белка – фиброин шелка, выделяемый гусеницами шелкопряда в период формирования куколки и являющийся основным компонентом шелковых нитей.

Соединительная ткань. Её основу составляют коллагеновые и эластиновые волокна. Коллагеновые волокна—преимущественно лентовидной формы, но известно до пяти морфологических вариантов; эластиновые волокна—нитевидной формы. Коллагеновые и эластиновые волокна вместе с перепонками образуют губчатую структуру соединительной ткани, в ячейках которой содержится тканевая жидкость. Клеточные элементы в соединительной ткани немногочисленны, хотя и разнообразны.

В зависимости от соотношения в составе соединительной ткани коллагеновых и эластиновых волокон и других морфологических элементов различают ее разновидности: плотную, рыхлую и эластическую. Плотная соединительная ткань содержит преимущественно коллагеновые волокна. Она образует сухожилия, связки, оболочки мускулов и внутренних органов, входит в состав кожи. Рыхлая соединительная ткань в отличие от плотной содержит больше клеточных элементов. Она главным образом связывает другие ткани и мускулы между собой, а также кожу с поверхностной фасцией. В эластической ткани преобладают эластиновые волокна. Эта ткань входит в выйную связку, желтую фасцию живота и стенки крупных кровеносных сосудов.

Высокая прочность коллагеновых и упругость эластиновых волокон обусловливают прочностные свойства соединительной ткани в целом, которые значительно превосходят такие же свойства мышечной ткани. Если сопротивление резанию различных мускулов колеблется в пределах 1,3—8,6 кН/м, то для соединительной ткани оно составляет 27—40 кН/м. Соединительная ткань биологической ценности не представляет, однако включается в различные продукты питания как полезный для процесса пищеварения компонент.

Костная ткань - это вид соединительной ткани с сильно развитым промежуточным межклеточным веществом, состоящим из органических и неорганических компонентов и воды. Сухая кость содержит 70 % неорганических компонентов, 30–36 % из оставшихся 30 % приходится на коллаген, который определяет прочностные свойства кости, ее высокую упругость и ударную вязкость.

На первый взгляд может показаться, что любая кость – это монолит, состоящий из одного вещества. Однако поверхностное впечатление обманчиво. Так, данные биохимического анализа свидетельствуют о том, что кость состоит из нескольких веществ, представленных в процентном отношении следующим образом: 50% – неорганические вещества, т.е. минеральные вещества и микроэлементы; 25% – органические вещества, из которых основная доля (90%) приходится на коллаген, а оставшиеся 5% представлены мукополисахаридами (аминогликаны); 25% – вода. Вполне вероятно, что такое относительное высокое содержание воды в костях для многих читателей явится неожиданностью. При микроскопическом исследовании кости в ней обнаруживается расчлененная микроструктура, состоящая из клеток и межклеточного основного вещества. В костной ткани встречаются различные типы клеток:

– костеобразовательные клетки (остеобласты),

– костные клетки (остеоциты),

– клетки–разрушители костной ткани (остеокласты).

Функция костеобразовательных клеток – формирование нового костного вещества. Используя свой клеточный инвентарь, который можно было бы сравнить с машинным оборудованием фабрики, они перерабатывают поступающее сырье в готовые продукты. Так, например, поглощая аминокислоты эти мельчайшие структурные элементы белка, костеобразовательные клетки синтезируют их в предшественников коллагена, который затем в виде коллагенозного костного белка выбрасывается из тела клетки во внешнюю среду. При отлаженной поставке всех необходимых основных структурных элементов остеобласты развивают чрезвычайно высокие производительные темпы.

Достаточно сказать, что каждая клетка ежедневно вырабатывает слой костного вещества (еще необызвествленного) толщиной в 1 микрометр. Костные клетки обращают на себя внимание своей характерной формой: многочисленные тончайшие отростки, отходящие от тела клетки, придают ей сходство с пауком. Бросается в глаза, что соседние костные клетки благодаря этим отросткам находятся в контакте друг с другом. Задача костных клеток заключается в том, чтобы контролировать заданный состав вновь образованного костного вещества и в случае необходимости вводить соответствующие поправки.

Костная ткань благодаря особому составу межклеточного вещества обладает особенными механическими свойствами: твердостью и прочностью.

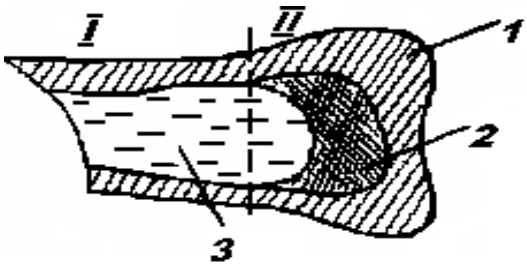


Рис. 5.21 – Строение опорной кости:
1 – компактная костная ткань,
2 – губчатая костная ткань,
3 – жировая ткань
I – эпифиз, II – диафиз

Межклеточное вещество состоит из минеральных солей, в основном солей кальция и фосфора (70%) и органического вещества – белков оссеина и коллагена (30%). Клетки костной ткани – остеоциты, остеобласты, остеокласты. Остеоциты – это зрелые костные клетки. Остеобласты – молодые костные клетки, за счет которых кости нарастают в толщину и в длину. Остеокласты – это костные клетки–разрушители, участвующие в перестройке костей. Межклеточное вещество образует костные пластинки толщиной от 4 до 15 мкм. Структурной и функциональной единицей костной ткани является остеон. Остеон – это система концентрических цилиндрических костных пластинок, вставленных друг в друга. Между пластинками остеона находятся костные клетки. Внутри вдоль остеона лежит канал (гаверсов канал), в котором проходят мелкие кровеносные сосуды. В костях остеоны ориентированы по направлению действия наибольших нагрузок, поэтому остеонное строение придает костям дополнительную прочность. Между остеонами располагаются вставочные костные пластинки.

В скелете животных различают опорные кости (конечности, череп) и каркасные кости (ребра, позвоночник). Костная ткань подразделяется на компактную костную ткань и губчатую костную ткань. Опорные кости скелета состоят преимущественно из компактной костной ткани, каркасные кости – из губчатой. Строение опорной кости представлено на рис. 5.21.

По данным А. А. Соколова модуль упругости диафиза составляет 156 МПа. На прочностные свойства кости значительно влияет термическое воздействие.

5.13.3 ФИЗИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОВЕРХНОСТНЫМ КОНТАКТАМ КЛЕТОК В БИОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Физический подход к клеточному контакту может основываться на оценке сил, действующих при взаимодействии двух поверхностей. Для облегчения подхода силы разделяются на две важнейшие группы – притяжения и отталкивания. Силы притяжения включают:

1 - образование связей между взаимодействующими поверхностями;

2 - притяжение к поверхности с противоположным зарядом;

3 - электростатическое притяжение между поверхностями с одноименным зарядом;

4 - силы Ван-дер-Ваальса (при больших расстояниях).

Силы отталкивания включают:

1 - отталкивание между поверхностями с одноименным зарядом;

2 - силы Ван-дер-Ваальса (при малых расстояниях);

3 - препятствие притяжению со стороны поверхностных слоев.

Один из типов межклеточного взаимодействия – это простой контакт. Простые контакты занимают наиболее обширные участки соприкасающихся клеток. Расстояние между билипидными мембранами соседних клеток составляет 15-20 нм, а связь между клетками осуществляется за счет взаимодействия макромолекул соприкасающихся гликокаликсов. Посредством простых контактов осуществляется слабая механическая связь – адгезия, не препятствующая транспорту веществ в межклеточных пространствах. Разновидностью простого контакта является контакт "типа замка", когда плазмолеммы соседних клеток вместе с участком цитоплазмы как бы впячивается друг в друга (*интердигитация*), чем достигается большая поверхность соприкосновения и более прочная механическая связь.

Межклеточные пространства заполнены органическим веществом, которое скрепляет клетки между собой. Состав этого вещества зависит от природы растительной ткани, ее нахождения в тех или иных морфологических структурах растения, но всегда в межклетниках находятся либо белки, либо пектины как связующие вещества растительной ткани. Между периферийными белками мембран клеток и веществами межклетников существуют устойчивые межмолекулярные связи, в которых непосредственно участвуют молекулы воды. Глобулы белка удерживают воду пептидными связями *–CO–NH–* (одну молекулу H_2O), аминными группами $-NH_2-$ (одну молекулу H_2O), карбоксильными

группами *–COOH–* (четыре молекулы H_2O). Другой полюс диполя воды удерживается соседней макромолекулой. Таким образом, межмолекулярная связь в межклеточных областях является преимущественно водородной. Энергия водородной связи составляет значение порядка 40 кДж/моль. Монослой воды вокруг молекулы белка с молекулярной массой более 15000 составлен 600 – 1000 молекулами воды. Масса монослоя воды примерно равна массе белка. Обезвоживание приводит к слипанию глобул белка, т.е. установлению поперечных связей между макромолекулами без участия молекул воды.

Пектин – водорастворимое вещество, состоящее из частично или полностью метоксилированных остатков полигалактуроновой кислоты. Молекула пектина состоит из «гладких» линейных участков и разветвленных фрагментов. Структура и химический состав пектиновых веществ определяют пространственную форму их молекул и характер взаимодействия с другими соединениями. Пектины обладают структурой с ограниченной гибкостью, стабилизируемой водородными и гидрофобными связями. Растворимый пектин находится в межклеточных слоях ткани зрелых плодов. Молекулы пектина в воде легко ассоциируются друг с другом, либо с крупными молекулами сопутствующих веществ. Так же, как и в случае с белком, пектин устанавливает с соседними молекулами водородные связи.

В пищевых вязко-пластичных продуктах и полуфабрикатах, содержащих белки или пектины, а таких – подавляющее большинство, именно эти биополимеры определяют прочность поверхностного взаимодействия – адгезию и когезию. П.А. Ребиндер относил белки к группе структурообразующих ПАВ с эффективным стабилизирующим действием по отношению к дисперсным системам различной природы. Подобную же функцию природа отвела и пектинам.

Объекты переработки растительного происхождения чаще всего в нативном состоянии представляют собой коагуляционные дисперсные системы, влага в которых находится во всех формах связи с макромолекулами биополимеров, но, например для злаковых эти формы ограничены химической и физико-химической связями. Механическое обезвоживание либо сушка создают условия для перехода структур из коагуляционных, когда поверхностное взаимодействие микроструктур, в частности – растительных клеток, осуществляется адгезионно (дисперсная фаза – дисперсионная среда), в конденсационно-кристаллизационные. То есть прочность обезвоженного растительного сырья определяется когезионным поверхностным взаимодействием его макроструктур и «кирпичиков» (опять же – частично обезвоженных растительных клеток). Но поверхностные белки клеточных мембран могут взаимодействовать с белками соседней мембраны как непосредственно, так и с участием молекул воды и веществом межклетников, содержащим белки либо пектины. Следовательно, задача определения внутренней прочности в дисперсных системах растительного происхождения, а также прочности их взаимодействия с поверхностями рабочих органов машин и аппаратов сводится к определению удельной поверхностной энергии дисперсных систем, содержащих биополимеры и влагу в различной концентрации.

Контрольные вопросы

1. Что является основными параметрами твердых тел?
2. Что понимают под прочностью среды тела?
3. Как теоретически определяется реальная прочность?
4. Что представляет собой разрушение тела, какие типы разрушения бывают?
5. Дайте характеристику разрушения отрывом.
6. Дайте характеристику разрушения сдвигом.
7. Как зависит энергия разрушения от температуры?
8. Приведите основные свойства твердых тел.
9. Дайте определение упругости.
10. Дайте определение эластичности.
11. Дайте определение пластичности.
12. Дайте определение релаксации.
13. Дайте определение остаточным напряжениям.
14. Какие тела называют изотропными, приведите примеры.
15. Какой математической моделью описывают негуковские тела?
16. Напишите функцию релаксации деформаций.
17. Перечислите способы разрушения единичных твердых тел, дайте им характеристику.
18. Дайте характеристику способов разрушения твердых тел в слое.
19. Дайте классификацию процессов разрушения (дезинтеграции)
20. В чем заключается идея Гриффица , приведите его условие для разрушения твердого тела.
21. Что такое поверхностное натяжение сплошной среды?
22. Почему расчетная прочность всегда меньше прочности реальной?
23. Почему при уменьшении размеров тела прочность возрастает? Как изменяется эта зависимость?
24. Какова роль трещин Гриффица на поверхности хрупкого тела?
25. Какими могут быть перемещения поверхности трещины?
26. Выразите математически условие Гриффица.
27. Чем отличается процесс образования трещины в телах, обладающих пластичностью?
28. Приведите признаки дисперсной системы и дайте им характеристику.
29. Как определяется поверхностная энергия Гиббса?
30. Напишите и объясните объединенное уравнение первого и второго начал термодинамики.
31. Что такое адгезия?
32. Напишите и поясните закон Гельмгольца.
33. Как связаны энергия Гиббса и работа адгезии?
34. Дайте характеристику молекулярных сил.
35. Напишите и поясните баланс энергий при взаимодействии двух фаз.
36. В чем заключается понятие селективности дезинтеграции?

37. Какая бывает селективность, поясните на примерах.
38. Приведите классификацию растительного сырья с позиции селективной дезинтеграции.
39. Изобразите и опишите двукомпонентные модели растительного сырья.
40. Как определяется адгезионная прочность на границе поверхностного взаимодействия двух тел?
41. Изобразите и поясните обобщенную модель трансформирования подводимой к телу энергии при его деформировании и разрушении.
42. Какой элемент растительной ткани является наиболее прочным, как взаимодействуют клетки друг с другом?
43. Какие вещества биологических тканей являются структурными, какие формируют каркас?
44. Дайте характеристику мышечной ткани.
45. Дайте характеристику соединительной ткани.
46. Дайте характеристику костной ткани. Как классифицируют кости?
47. Как описывается процесс взаимодействия клеток с физической точки зрения?
48. Какова роль межклеточного вещества в прочности растительной ткани?
49. Какие межмолекулярные связи формируют прочность растительной кани?
50. Что дает интердигитация с позиции прочности?

Глава 6 ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Деформационное поведение твердых тел под нагрузкой определяет особенности их технологической переработки, в первую очередь дробления, измельчения и резания. Традиционно испытывают материалы квазистатической нагрузкой, когда градиент силы не влияет на характер деформации и динамической нагрузкой ударом как стесненным, так и свободным. Разрушение твёрдого тела происходит при возникновении в нём предельного напряжённого состояния. В первом случае по кривой деформации определяют предельное напряжение разрушения и модуль упругости материала. Во втором случае – работу разрушения образца. Работа разрушения любого тела зависит от его физико-механических свойств и характера нагружения. Основным критерием оценки механических свойств материалов является прочность. Прочность определяет способность тела сопротивляться разрушению и характеризуется критическим напряжением, выше которого структура материала разрушается практически мгновенно.

6.1 Определение и расчёт прочностных свойств материалов при квазистатической нагрузке

В последние десятилетия для проведения структурно-механических исследований материалов преимущественно применяют лабораторный измерительный прибор "Структурометр СТ–1", выпускаемого научно-производственной фирмой «Радиус». Принцип работы устройства основан на измерении силы взаимодействия неподвижного инструмента методом тензометрии и исследуемого образца материала, который перемещается столиком по заданному закону.

Схема лабораторного измерительного прибора "Структурометр СТ–1" представлена на рисунке 6.1.

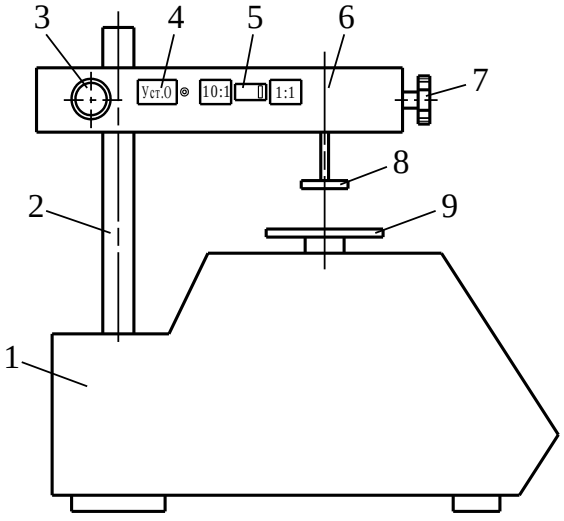


Рис. 6.1 – Схема прибора "Структурометр СТ–1" :

1 – блок управления; 2 – штанга; 3 – винт, фиксирующий головку на штанге; 4 – резистор установки "0"; 5 – переключатель коэффициента усиления; 6 – измерительная головка; 7 – винт, фиксирующий сменный инструмент;8 – сменный инструмент; 9 – столик

Подготовка устройства к работе осуществляется следующим образом. В измерительную головку 6 устанавливается требуемый инструмент (пластина) 8 и закрепляется с помощью винта 7. Подготавливаемый исследуемый образец устанавливается на столик строго по оси инструмента. При необходимости можно приблизить инструмент к образцу, либо опустив измерительную головку вниз вдоль штанги, либо подняв столик при помощи соответствующей кнопки "↑". Затем, при помощи кнопок на панели управления выбираются коды операций, если требуется их изменение, и вводятся параметры операций. Изменение коэффициентов кодов операций производится до выбора режима работы "Структурометра", который обусловливается целью экспериментальных исследований. После выбора режима вводятся параметры работы устройства.

С панели управления задаются следующие параметры работы устройства: значение начального усилия касания F_0, с которого начинается отсчёт перемещения столика; значение скорости перемещения столика V; значение усилия, до которого будет нагружаться образец в ходе эксперимента F. Величина F_0 зависит от характера поверхности образца материала, формы инструмента (индентора) и вида испытания. Устройство позволяет проводить измерения при следующих диапазонах и погрешностях настроек:

1) диапазон задания скорости перемещения столика, мм/мин 1– 100;
2) дискретность задания скорости, мм/мин 1;
3) относительная погрешность поддержания скорости, % менее 0,1;
4) диапазон измерения нагрузки, Н 0,1 – 100;
5) относительная погрешность измерения нагрузки, % менее 1;
6) диапазон измерения перемещения, мм 0 – 43;
7) относительная погрешность измерения времени, % менее 1.

"Структурометр" может работать как самостоятельно, как и в составе информационно-измерительного комплекса. Для передачи экспериментальных данных предусмотрена возможность подключения "Структурометра" к персональному компьютеру.

При исследовании Структурометром" прочностных свойств материалов сжатием испытания проводят следующим образом. В измерительной головке 6 прибора закрепляют с помощью винта 7 насадку 8. Исследуемый образец устанавливают на столик 9 прибора и подводят вплотную к нему пластину 8. Производят изменение параметров кодов операций. Для дальнейшей обработки и анализа результатов экспериментов требуется разумное количество зафиксированных экспериментальных точек, достаточных для установления общей формы зависимости и предела прочности.

Прибор настраивается на режим "Определение упругих и пластических деформаций". Выбранный режим по заданному закону и рабочим параметрам полностью отвечает экспериментальному определению прочностных свойств сырья. После выбора режима задают следующие параметры: значение начального усилия касания F_0 = 0,5 Н, скорость перемещения столика; значение предельного усилия нагружения. Это значение может быть установлено при проведении пробных экспериментов, оно должно быть достаточным для разруше-

ния любого образца исследуемой партии. На этом задание параметров заканчивается. На индикатор прибора выводятся текущие значения усилия *F* и перемещения *H*.

По нажатию кнопки "Старт" на лицевой панели блока управления 1 значения *F* и *H* обнуляются, столик 9 движется вверх с заданной скоростью и сжимает исследуемый образец, разрушая его. При достижении значения F_0 начинается отсчёт перемещения. Текущие значения при каждом шаге измерений *F* и *H* выводятся на индикатор. При достижении заданного значения усилия нагружения *F* столик останавливается, даётся короткий звуковой сигнал, значение перемещения *H1* запоминается, и столик движется вниз с заданной скоростью. При достижении значения F_0 раздаётся короткий звуковой сигнал и фиксируется значение перемещения *H2*. Столик движется с максимальной скоростью вниз, в исходное положение, и останавливается. На индикатор выводятся значения *H1* и *H2*.

Для исследования *сдвиговых* прочностных характеристик объектов разрушения на "Структурометре" последовательность проведения экспериментов следующая. В измерительной головке 6 прибора 9 (рис. 6.1) закрепляют насадку 8 в виде пластины. На столик 9 прибора устанавливают специально разработанное приспособление, с помощью которого создавались сдвиговые нагрузки. Экспериментальное устройство (рис. 6.2) состоит из двух полых цилиндров 2 и 5 с четырьмя радиальными углублениями на поверхности каждого, двух фиксаторов 3 с двумя углублениями на поверхности каждого и четырех винтов 1 для соединения фиксаторов 3 с внешним полым цилиндром 5. Ширина *b* и высота *h* четырех радиальных углублений составляют:

1 – $b = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м,

2 – $b = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 3 \cdot 10^{-3}$м,

3 – $b = 8 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 4 \cdot 10^{-3}$ м,

4 – $b = 10 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м.

Исследуемый образец 4 устанавливают в радиальное углубление внешнего полого цилиндра 5 таким образом, что одна половина материала располагалась на поверхности одного из углублений внутренней части внешнего цилиндра 5, а вторая половина – внутри внешнего цилиндра. Углубление выбирается в зависимости от размеров материала. Половину образца, находящуюся в радиальном углублении, вплотную прижимают с помощью одного из фиксаторов 3 винтами 1 к поверхности внешнего полого цилиндра 5.

Исследуемое тело закрепляется в радиальных углублениях внешнего полого цилиндра 5 и фиксатора 3.Затем ко второй свободной половине поверхности образца сверху подводят внутренний полый цилиндр 2 таким образом, что своими торцевыми выступами он входил во внутреннее полое пространство внешнего цилиндра, а часть материала оказалась в радиальном углублении внутреннего цилиндра. Радиальные углубления цилиндров и фиксаторов в ходе проведения экспериментов должны совпадать.

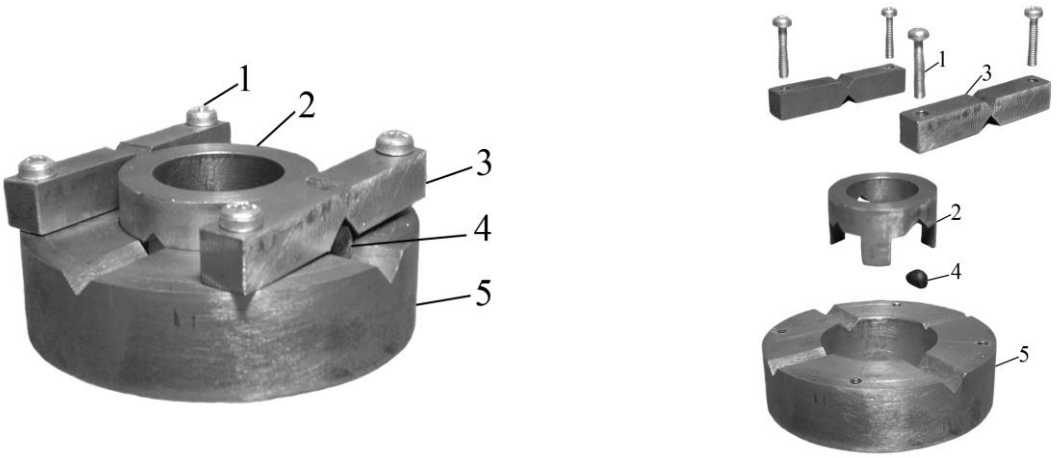


Рис. 6.2 – Устройство для испытания материалов сдвигом:
1 – винт; 2 – внутренний полый цилиндр; 3 – фиксатор; 4 – образец;
5 – внешний полый цилиндр

Устройство с образцом материала устанавливают на столик "Структурометра" и сверху к внутреннему полому цилиндру вплотную подводят пластину. Значения параметров кодов операций, вводимые на экран индикатора "Структурометра" с его клавиатуры, сохраняют такими же, как при исследовании прочностных свойств объектов разрушения сжатием в режиме "Определение упругих и пластических деформаций". Алгоритм работы прибора определяется последовательным выбором желаемых значений параметров данного режима. Текущие значения усилия F и перемещения H выводятся на индикатор прибора. В значение начального усилия касания F_0 при нагружении сдвигом необходимо ввести поправку, прибавить значение веса внутреннего полого цилиндра. При построении диаграмм нагружения сдвигом F=f(N) необходимо учесть эту поправку.

При испытаниях образцов в устройстве при каждом шаге измерений регистрируются следующие экспериментальные данные: N - число измерений (количество перемещений столика); F - усилие нагружения, Н; t - время, с; H - деформация образца (значение перемещения столика), мм. При помощи, установленной на персональном компьютере программы *STRUCT*, полученные данные считываются с прибора и записываются в текстовые файлы для просмотра. Информация представляется в виде таблиц усилий. Содержимое таблиц иллюстрируется графиками F = f(N).

Обработка результатов экспериментов проводится при помощи прикладной программы *Excel* в среде *Windows* 2000. Файлы экспериментальных данных, полученные на "Структурометре" с помощью специальной программы *STRUCT* и имеющие расширение "*.lst*", конвертируются в программе *Excel* в файлы с расширением "*.xls*" для последующих расчётов и построений экспериментальных зависимостей.

Результаты испытаний, полученные из таблицы усилий в программе *Excel*, представляются в виде диаграмм нагружения исследуемых тел F=f(N) сжатием или сдвигом, построенных в координатах: усилие сжатия или сдвига F и частота измерений N.

При изучении и обработке полученных диаграмм интерес представляет начальная часть экспериментальных кривых до первичного разрушения (образования магистральной трещины), что отражается характерным изломом линии графика, а также резким сбросом силы сопротивления образца. Для дальнейшего изучения из таблицы усилий выбирают значения, соответствующие диапазону интересующих нас частей экспериментальных кривых. По выбранным данным строят диаграммы нагружения сжатием или сдвигом исследуемых объектов.

Диаграммы нагружения образцов F = f(N) пересчитывают в координатах σ–ε и τ–ε путём деления ординат F на первоначальную площадь сечения образца S и абсцисс, подставляя вместо частоты измерений N величину деформации $\Delta l = H$ – значения величины перемещения столика на начальный размер l (что равносильно изменению масштабов по обеим осям). Пересчитанные таким образом зависимости трансформируются в функции напряжений σ или τ от относительной деформации ε.

Ординатам предельных характерных точек усилий сжатия или сдвига F, когда происходит разрушение образцов, диаграмм нагружения F = f(N) соответствуют предельные прочностные характеристики компонентов при сжатии $\sigma_{пр}$ и сдвиге $\tau_{пр}$ зависимостей напряжений от относительных деформаций ε при различных скоростях.

Расчёт предельных напряжений исследуемых образцов при сжатии и сдвиге проводят по формулам:

$$\sigma_{пр} = F/S, \qquad \tau_{пр} = F/S, \tag{6.1}$$

где $\sigma_{пр}$ – предельное напряжение сжатия, Па; $\tau_{пр}$ – предельное напряжение сдвига, Па; F – усилие нагружения при сжатии или сдвиге, Н; S – площадь поперечного сечения оболочки образца, м^2.

Рассчитывают относительную деформацию образца при сжатии и сдвиге:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{6.2}$$

где Δl – деформация оболочки образца (Δl соответствует значению расстояния перемещения столика H в таблице усилий, мм), м; l – начальный характерный размер образца, м.

По полученным данным строим кривые зависимостей напряжений сжатия σ=f(ε) или сдвига τ=f(ε) от относительных деформаций ε образцов при различных скоростях нагружения в координатах σ – ε и τ – ε.

Прямолинейные участки зависимостей σ=f(ε) и τ=f(ε) указывают на прямопропорциональность между напряжением сжатия или сдвига и относительной деформацией. Для данных зависимостей справедлив закон Гука в упрощённой форме

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{6.3}$$

где E – модуль упругости первого рода, Па.
При этом модуль упругости может быть определен:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \mathrm{tn}\,\alpha, \tag{6.4}$$

т.е. модуль графически определяется через тангенс угла наклона к оси абсцисс прямолинейной части зависимости напряжений сжатия от относительной деформации.

6.2 Определение и расчёт прочностных свойств материалов при динамической нагрузке

К динамической нагрузке относят свободный и стесненный удар а также импульсное сжатие. Для определения работы разрушения образца удобнее применять стесненный удар, т.к. вся кинетическая энергия рабочего органа прибора трансформируется в потенциальную энергию деформации и разрушения образца.

Согласно теории разрушения академика П.А. Ребиндера полная энергия A разрушения материала складывается из суммы энергий, затрачиваемых на его упругую деформацию и на образование новых поверхностей:

$$A = \left(\sigma_{np}^2 \Delta V \big/ 2E\right) + k_S \Delta S, \tag{6.5}$$

где σ_{np} – предельное напряжение разрушения; ΔV – объём разрушаемого материала, в котором достигнуто предельное состояние; E – модуль упругости разрушаемого материала; k_s – удельная поверхностная энергия материала; $\Delta S = S_K - S_H$ – вновь образованная при разрушении площадь поверхности (S_K, S_H – общая площадь поверхности материала после и до разрушения).

Таким образом, приращение энергии упругой деформации сверх критической трансформируется в энергию вновь образованной свободной поверхности.

Наиболее известны испытания на ударную вязкость с помощью маятникового копра. *Ударная вязкость* представляет собой способность материала сопротивляться деформации и разрушению, поглощая механическую энергию ударной (динамической) нагрузки. Ударная вязкость определяется отношением величины работы, затрачиваемой на деформацию и разрушение образца при испытании ударной нагрузкой, к площади образованной при разрушении поверхности.

Существует несколько разных методов испытания материалов на ударную вязкость. Широкое распространение получили методы испытания прочностных ударных свойств по Изоду и Шарпи. Испытания на ударную вязкость по Изоду и Шарпи отличаются друг от друга расположением образцов в опорах для их фиксирования. Деформирование и разрушение тела по методу Шарпи происходит при двухопорном ударном изгибе, а по методу Изода при консольном ударном изгибе. Методы основаны на разрушении образца материала одним ударом маятника копра, на шкале которого определяют разности углов за-

рядки и взлёта, вычисляют потерю кинетической энергии маятника, которая является искомой работой разрушения образца.

Испытание на ударную вязкость по Изоду и Шарпи представляет собой ударное разрушение при изгибе образцов с надрезом и без него (рис. 6.3). Эти методы имеют две характерные особенности. Во-первых, определяемая ударная прочность позволяет рассчитать энергию, необходимую для разрушения образца. Во-вторых, в этих методах используются образцы как с надрезом, так и без него. Наличие или отсутствие концентратора напряжения (надреза) у исследуемых образцов зависит от характера воздействия, условий нагружения и деформирования материала при разрушении, а также от физико-механических свойств, проявляющихся при этом, и структуры компонентов, образующих объект разрушения.

Известно, что наличие резкого перехода в сечениях образцов, склонных к пластическому деформированию, а также первых следов появления трещин облегчает проявление хрупкости и способствует преждевременному разрушению материала в этих местах. Поэтому у испытуемых образцов делают с одной стороны надрез с целью вызвать в образце при ударе резкую неоднородность и затруднить пластическую деформацию, чтобы облегчить оценку склонности материала к переходу в хрупкое состояние. Применение надреза резко снижает затраты энергии маятника на пластическую деформацию материала, ослабляет сечение образца и вызывает повышение напряжений от изгиба, к тому же повышает достоверность результатов.

Для сравнимости получаемых результатов стандартизируются форма и размеры образцов, надрезов и условия их механической обработки. Кроме того, нормируются: конструкция маятниковых копров, а именно: запас располагаемой ими энергии; расстояние между опорами, на которые помещается образец; скорость ножа молота в момент удара по образцу; угол заострения ножа молота, а также температура образца и помещения, в котором проводятся экспериментальные исследования, так как все эти факторы имеют при испытаниях большое значение.

Требования к вырезке заготовок для образцов, их количество, местоположение (образцы продольные, поперечные, радиальные или тангенциальные) определяются стандартами на изготовление изделий или техническими условиями на материалы.

Испытания на ударный изгиб регламентированы ГОСТ 9454-78 "Металлы. Метод испытания на ударный изгиб при пониженных, комнатной и повышенных температурах", который предусматривает использование 20 типов образцов, различающихся как собственными размерами, так и размерами концентраторов при трёх видах надрезов.

Маятниковый копёр (рис. 6.3) состоит из чугунной станины 1 в виде массивной фундаментной плиты, на которой укреплены две вертикальные колонны 4 и 5. В верхней части колонн 4, 5 на горизонтальной оси подвешен укреплённый в шарикоподшипниковых опорах маятник 13 с грузом в виде стальных дисков и устройством для закрепления рабочего органа маятника – стального

закалённого ножа, служащего бойком при испытании. На оси маятника жёстко установлено спусковое колесо 12, позволяющее с помощью защёлки 11 фиксировать его в трёх различных положениях в зависимости от необходимого запаса энергии и скорости воздействия маятника на испытываемый образец 15. Для спуска маятника из любого взведенного положения на раме между колоннами имеется рукоятка 10, соединенная шнуром с защёлкой 11, поворотом которой освобождается маятник 13. Внизу на уровне вертикально висящего маятника к колоннам станины прикреплены две стальные закалённые опоры 2 и 3, на которые помещают испытываемый образец 15.

Перед испытанием маятник поднимают на угол α в верхнее исходное положение (рис. 6.4), где он удерживается в этом взведённом состоянии защёлкой в спусковом колесе.

При испытании образца маятник освобождается от защёлки, падая, ударяет объект исследований, разрушает его и взлетает на некоторый угол β (см. рис. 6.4). Определение угла взлёта маятника в копре производится следующим образом. На неподвижной оси маятника укреплена с небольшим трением указательная стрелка 6 (рис. 6.3). Поводок 7, жёстко связанный с вращающейся осью маятника, перемещает стрелку 6 при своём движении и оставляет в крайнем положении, соответствующем углу взлёта маятника после удара. Стрелка 6, указывающая угол подъёма маятника после разрушения образца фиксируется в крайнем положении за счёт сил трения, создаваемых прижатием пружины. Регулирование усилия прижатия осуществляется гайкой 9 с контргайкой 8. В момент удара маятника линейная скорость его движения составляет 3±0,1, 3,5±0,1 или 4±0,1 м/с в зависимости от его начального положения. Перед началом испытания необходимо проверить, чтобы при свободно висящем маятнике указатель стрелки совпадал с нулевым делением масштабной шкалы 14.

Маятниковые копры различаются в зависимости от предельного запаса потенциальной энергии, т.е. максимальной энергии удара маятника.

Исследования по определению ударной вязкости по методу Шарпи проводят не менее чем на десяти образцах, имеющих такую же форму и размеры, как и образцы для испытания на прочность при статическом нагружении на "Структурометре". Перед проведением испытания пробным разбиванием образца подбирают угол зарядки, обеспечивающий максимальную разность углов холостого и рабочего хода.

Маятник 13 поднимают и закрепляют защёлкой 11 в спусковом колесе 12. Испытуемый образец 15, размеры которого предварительно замеряют, устанавливают на две стальные закалённые опоры 2 и 3, привинченные внизу у стоек станины 1. Эти опоры могут переставляться в горизонтальной плоскости и позволяют производить настройку пролёта между ними применительно к различным образцам. Освобождение маятника 13 производится с помощью рукоятки защёлки. После спуска защёлки маятник, пройдя нижнее положение и разрушив образец 15, поворачивает стрелку 6 шкалы 14 на угол, который соответствует энергии, сохранившейся в маятнике после разрушения тела. Разность между высотой подъёма маятника в опыте без образца (при холостом ходе ма-

ятника) и в опыте с разбиванием объекта исследований позволяет вычислить работу, необходимую для разрушения тела.

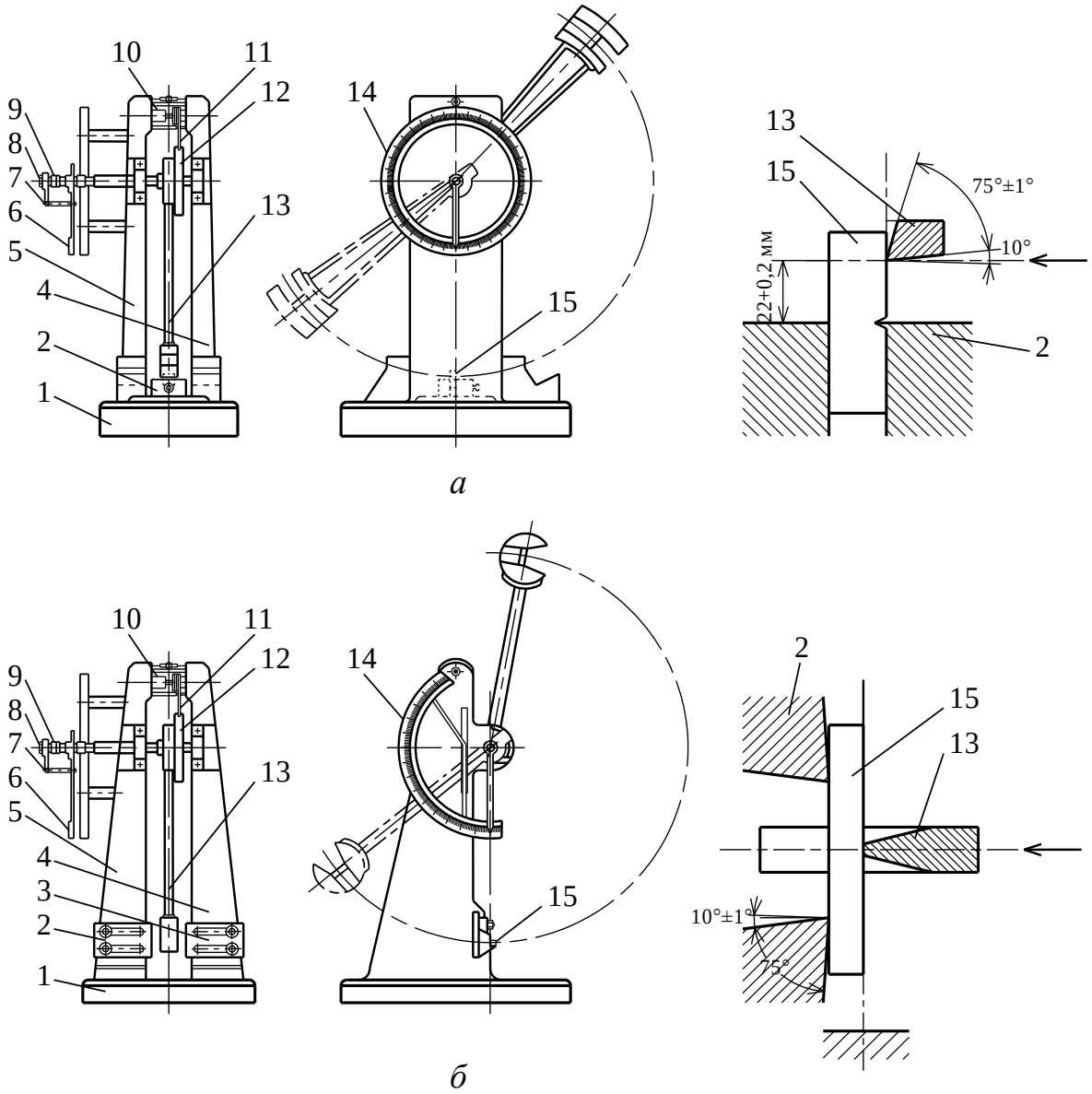


Рис. 6.3 – Схемы испытаний ударной вязкости по Изоду (стандарт JIS K 7110) (а) и ударной вязкости по Шарпи (стандарт JIS K 7111) (б) :
1 - станина; 2, 3 - опоры; 4, 5 - колонны; 6 - стрелка; 7 - поводок; 8 - контргайка; 9 - гайка; 10 - рукоятка; 11 - защёлка; 12 - спусковое колесо; 13 - маятник; 14 - шкала; 15 - образец

Работа, затраченная на разрушение образца, определяется разностью между первоначальным запасом энергии и избыточной энергией, неизрасходованной на излом тела, т.е. будет равняться разности энергии маятника до удара и после удара. Эта энергия включает в себя не только энергию, необходимую на разрушение образца, но и энергию, затрачиваемую на отбрасывание разрушившегося объекта исследований. Величина эти затрат энергии минимальна по

сравнению с затратами энергии на разрушение тела, поэтому при расчёте работы разрушения их не учитывают.

На излом образца маятник затрачивает определённую величину работы, поэтому угол взлёта маятника после разрушения β (рис. 6.4) всегда меньше угла подъёма маятника α перед испытанием. Если на пути маятника не было бы образца, то он взлетел бы на угол взлёта маятника при холостом ходе γ, который также всегда меньше угла α за счёт потерь энергии маятника на преодоление сил трения в подшипниках, на сопротивление воздуха и т.п.

Методы исследований на ударную вязкость, рассмотренные выше, являются ни чем иным как методами определения работы на образование новой поверхности образца и отличаются простотой приборов и физически обоснованной методикой расчета. В результате исследований принимают среднее арифметическое значений результатов на всех испытанных образцах.

Такой метод ударных испытаний прост, широко применяется для определения работы разрушения образцов. Технические условия на испытания материалов посредством маятникового копра закреплены ГОСТ 10708-82 "Копры маятниковые. Технические условия".

Рассмотрим детально энергию, необходимую для разрушения образца. Модель испытания ударом на маятниковом копре приведёна на рис. 6.4.

Потенциальную энергию маятника на высоте *h*, пренебрегая массой его плеча, определяют выражением:

$$E_0 = Mgh = Mgl(1-\cos\alpha), \qquad (6.6)$$

где *M* – масса маятника, кг; *l* – длина плеча маятника, м; α – угол подъёма маятника, град.

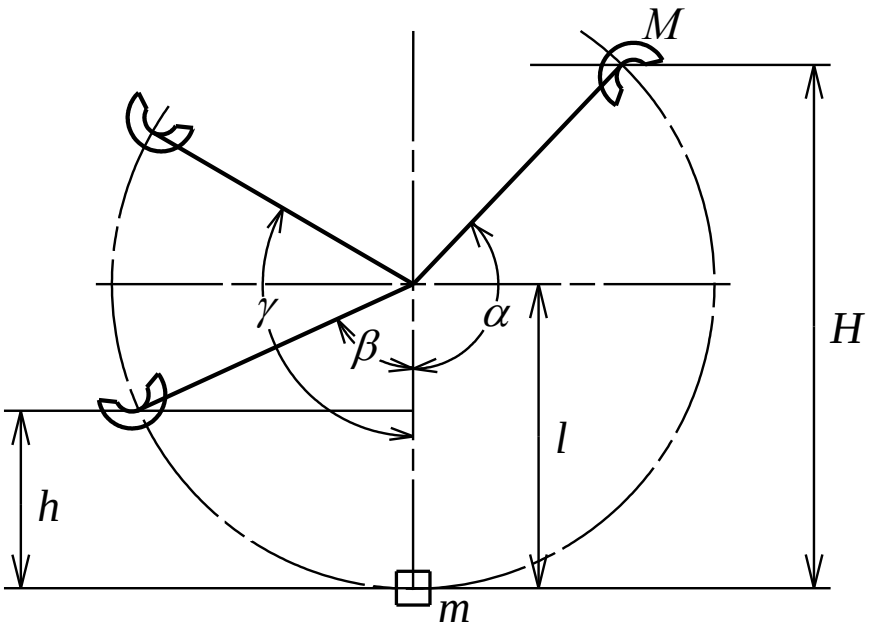


Рис. 6.4 – Модель испытания ударом на маятниковом копре

Если после разрушения образца маятник поднимается на угол β, то остаточная потенциальная энергия маятника равна

$$E_0' = Mgh = Mgl(1-\cos\beta). \qquad (6.7)$$

Следовательно, энергию, затраченную на разрушение образца, можно рассчитать, используя формулы (П.2.1) и (П.2.2), по выражению

$$E = E_0 - E_0' = Mgl\left(\cos\beta - \cos\alpha\right). \qquad (6.8)$$

Выражение (6.8) включает в себя не только энергию, необходимую для разрушения образца, но и энергию потерь на трение в испытательном приборе и энергию, затрачиваемую на отбрасывание разрушившегося образца. Величина энергии, затрачиваемой на придание осколкам образца кинетической энергии, как правило, мала и ей можно пренебречь. Для того, чтобы исключить энергию, затрачиваемую на трение в оси маятника, трение о воздух и другие диссипативные затраты энергии, нужно определить энергию (работу) холостого хода маятника

$$E_x = Mgl\left(\cos\gamma - \cos\alpha\right), \qquad (6.9)$$

где γ – угол взлёта маятника при холостом ходе, град.

Тогда более точно, с учётом (6.9), энергия разрушения образца материала определится выражением

$$E = Mgl\left(\left(\cos\gamma - \cos\alpha\right) - \left(\cos\beta - \cos\alpha\right)\right). \qquad (6.10)$$

При подстановке всех величин в системе СИ получают энергию разрушения образца в Дж.

Во время удара маятника по образцу часть кинетической энергии маятника передается образцу. Эта часть энергии (6.10) преобразуется в образце в энергию упругой деформации и энергию образования новой поверхности.

Величина работы, затрачиваемой на разрушение образца, определяется выражением:

$$A = Pl\left(\left(\cos\gamma - \cos\alpha\right) - \left(\cos\beta - \cos\alpha\right)\right), \qquad (6.11)$$

где P – вес маятника, Н; l – длина маятника (расстояние от оси подвеса до центра тяжести), м; α – угол зарядки маятника, град.; β – угол взлёта маятника после разрушения образца, град.; γ – угол взлёта маятника при холостом ходе, град.

Удельная работа разрушения образца может быть определена из выражения

$$a = A / S, \qquad (6.12)$$

где S=2F – площадь вновь образованной при разрушении поверхности, м^2;
F – поперечное сечение образца в плоскости действия разрушающей силы м^2.

Удельную работу разрушения тела (6.12), определяемую на маятниковом копре, можно трактовать как удельную работу на образование новой поверхности при разрушении.

Получаемые методами Изода и Шарпи энергии разрушения образцов по сути являются энергиями образования новой поверхности, то есть поверхностной энергией испытываемого материала. Методы обладают определенными недостатками, их нельзя назвать высокоточными, но применение их в прикладных исследованиях материалов растительного происхождения, на наш взгляд, весьма перспективно.

6.3 Особенности прочностных свойств и деформационного поведения материалов биологического происхождения

В научной и учебной литературе имеется большое количество экспериментальных данных о деформационном поведении пищевых материалов в различных их состояниях и различных видах нагрузок. Приведенные ниже результаты отличаются некоторой новизной и, что отличает их от более ранних исследований, получены в концепции адгезионной природы прочности биосырья, что позволяет объяснять особенности изменения тех или иных свойств при изменении условий испытаний. Согласно классификации материалов биологического происхождения, в основу которой положено наличие или отсутствие адгезионного взаимодействия между морфологическими структурами (раздел 5.10), сырье делится на связное и несвязное.

6.3.1 Экспериментальные исследования прочностных свойств связного сырья

В качестве объекта исследования выбран корень лопуха обыкновенного как перспективный вид сырья широкого диапазона использования. Отдельные морфологические части лопуха после специальной обработки употребляют в пищу, используют в лекарственных целях, в сельском хозяйстве как средство ветеринарной санитарной обработки и как инсектицид, в мыловарении, в лакокрасочном производстве, некоторые виды и как элемент ландшафтного декора.

Измельчению для пищевых целей чаще подвергается корень лопуха. Корни первого года жизни сочные и мясистые, второго года – деревянистые.

Корни лопуха содержат полисахарид инулин до 45%, эфирное бардановое масло до 0,17%, дубильные и горькие вещества, жироподобные вещества – 0,8 %, жирное масло, минеральные соли калия, кальция и магния, серосодержащие соединения, органические кислоты (кофейная, яблочная, лимонная, пальмитиновая, стеариновая), протеин до 12%, ситостерин и стигмастерин, сахар, витамины группы А, В, С, РР.

Сырье для экспериментов было собрано в Кемеровском районе в сентябре 2007 года. Корни большого лопуха (*Arctium. lappa*) были выкопаны, очищены от земли, промыты холодной водой. Подсушенные корни упаковывались в полиэтиленовые пакеты и хранились в холодильнике. Такой способ хранения объектов исследований позволяет сохранить их в течение длительного времени без значительных потерь качества.

Эксперименты проведены Д.В. Клениковым. Для проведения экспериментов было подготовлено 100 образцов сырья. Образец вырезался из серединной части корня. Форма образца кубическая с длиной ребра 10 мм. Все подготовленные образцы подвергались конвективной сушке при температуре 60^{o}С.

Предварительно образы были разбиты на партии, по 20 штук. Для получения образцов разной влажности навески высушивалась определенные промежутки времени. Продолжительность сушки первой партии проб материала составила 60 минут, продолжительность сушки последующих была кратна 60. Для определения массы сухого остатка три пробы исходного материала высушивались до постоянной массы, это были контрольные образцы, которые в дальнейшем не испытывались.

Контрольные образцы через равные промежутки времени (60 минут) взвешивались на электронных весах. Получив значения массы материала в моменты «до сушки» и «после сушки» и массы после сушки до постоянного веса, определялась влажность каждой партии материала W_n, по формуле:

$$W_n = \frac{G_{\text{вл}}}{G_n} \cdot 100\%$$

где $G_{\text{вл}}$ – масса влаги в каждой навеске материала, г:

$$G_{\text{вл}} = G_m - G_{\text{сух}}$$

где G_n – масса каждой навески до сушки, г; $G_{сух}$ – масса после сушки до постоянного веса, г.

Кривая сушки образцов корня лопуха обыкновенного представлена на рисунке 6.5.

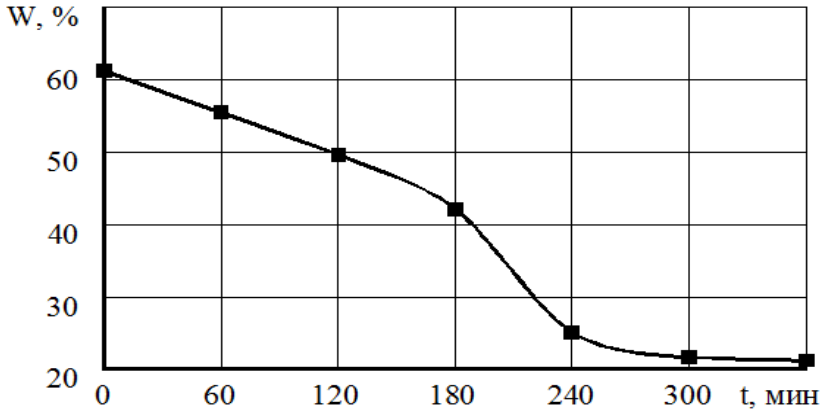


Рис. 6.5 – Кривая сушки образцов корня лопуха обыкновенного

Кроме влажности, контролировались геометрические размеры образцов. Изначально кубические образцы в процессе усушки по-разному изменяли свои геометрические размеры. Усушка в поперечном направлении относительно оси корня значительно превысила усушку в продольном направлении. В итоге образцы уменьшились на 40% в поперечном направлении и на 20% – в продольном (рис. 6.6). Был использован коэффициент усушки k, который определялся путем измерения геометрических параметров контрольных образцов в момент «до сушки» и в процессе сушки. Расчет вели по формуле:

$$k = \frac{S_i}{S_o}$$

где S_o – площадь сечения исходного образца, м^2; S_i – текущее значение площади образца, м^2

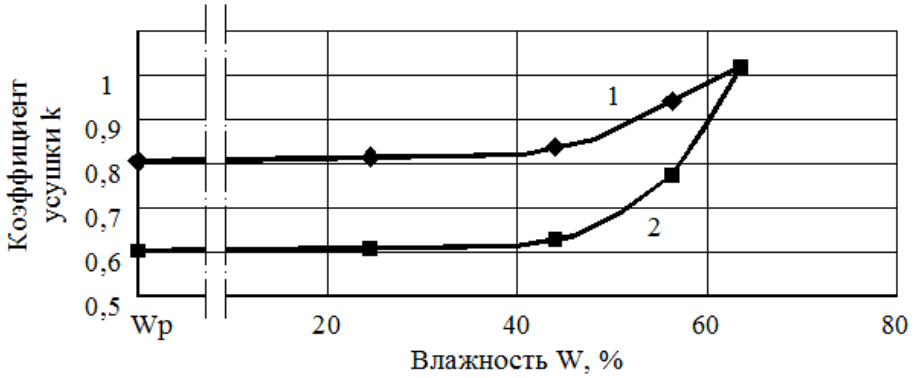


Рисунок 6.6 – Зависимость коэффициента усушки k образцов корня лопуха от влажности W, %:
1 - вдоль оси корня; 2 - поперек оси корня

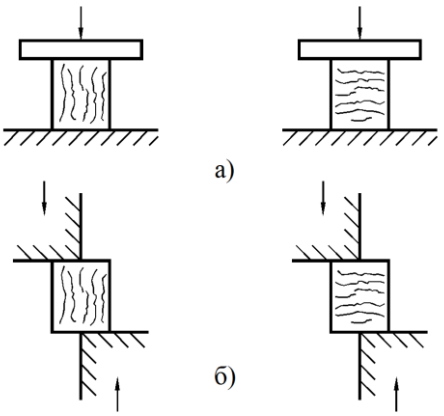


Рис. 6.7– Схема испытаний образцов кубической формы корня лопуха обыкновенного сжатием (а) и сдвигом (б)

Для определения напряжения разрушения при сжатии и сдвиге партии образцов различной влажности испытывались на приборе "Структурометр СТ–1". Испытания проводились при квазистатическом нагружении сжатием и сдвигом с различными скоростями. Образцы корня лопуха подвергались деформации и разрушению как вдоль волокон, так и поперек. Схема испытаний представлена на рисунке 6.7. При исследовании на "Структурометре" прочностных свойств объектов разрушения при сжатии испытания проводили следующим образом. Прибор настраивали на режим "Определение упругих и пластических деформаций". После выбора режима задавали следующие параметры: значение начального усилия касания F_0=0,3 Н, с которого начинается отсчёт перемещения столика; измерения проводили при различных скоростях перемещения столика V=0,33·10^{-3} м/с, V=0,83·10^{-3} м/с, V=1,17·10^{-3} м/с и V=1,67·10^{-3} м/с; разрушение образца производили до достижения заданного значения предельного усилия нагружения F=60 Н. Это значение было установлено при проведении пробных экспериментов, оно является достаточным для разрушения любого образца данного типа. На этом задание параметров заканчивается. На индикатор прибора выводятся текущие значения усилия F и перемещения H.

При определении на "Структурометре" сдвиговых прочностных характеристик объектов разрушения на столик прибора устанавливали специально разработанное приспособление, с помощью которого создавались сдвиговые нагрузки.

В процессе сжатия и сдвига исследуемых образцов в устройстве при каждом шаге измерений регистрировались следующие экспериментальные данные: *N* – число измерений (количество перемещений столика); *F* – усилие нагружения, Н; *t* – время, с; *h* – деформация образца (значение перемещения столика), мм. При помощи установленной на персональном компьютере программы полученные данные считывались с прибора и записывались в текстовые файлы для просмотра. Информация была представлена в виде таблиц усилий. Содержимое таблиц иллюстрируется графиками *F*=f(*N*).

Расчетом были получены зависимости предельных напряжений разрушения и сдвига от влажности образцов. Предельное напряжение разрушения $\sigma_{пр}$, МПа, и предельное напряжение сдвига $\tau_{пр}$, МПа, вычислялись по формуле

$$\sigma_{пр} = \frac{F}{S \cdot k}$$

где *F* - усилие, Н (экспериментальные данные); *S* - площадь поперечного сечения образца, нормального направлению нагрузке, м^2; *k* – коэффициент усушки.
На рисунках 6.8 – 6.11 представлены зависимости предельных напряжений разрушения при сжатии и сдвиге образцов корня лопуха при их различной влажности. Изучение графиков, представленных на рисунках, показывает наличие характерных точек и участков. Исходная (нативная) влажность образцов составила 62 %. Понижение влажности до 56% привело к минимальной прочности при сжатии и сдвиге вдоль волокон и повышению прочности до максимальной при сжатии вдоль оси корня при скорости нагружения 100 мм/мин.

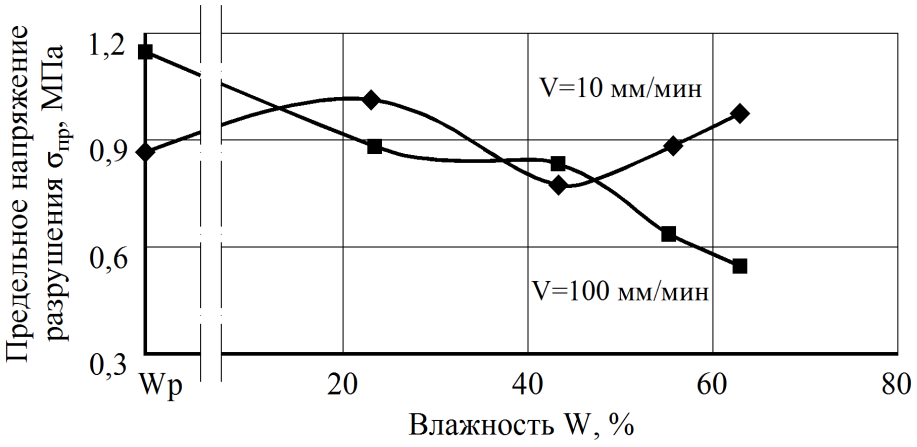


Рис. 6.8 – Зависимость предельных напряжений разрушения $\sigma_{пр}$ от влажности W образцов корня лопуха при сжатии поперек оси

Очевидно, что такое деформационное поведение растительной ткани связано с исчезновением тургора, внутреннего давления в клетках, что приводит к снижению упругости ткани, а следовательно – понижению внутренней энергии вещества. Увеличение прочности при такой влажности на повышенной скоро-

сти деформирования видимо, связано с исчезновением релаксационных процессов, когда напряжения не успевают более равномерно распространиться в объеме образца.

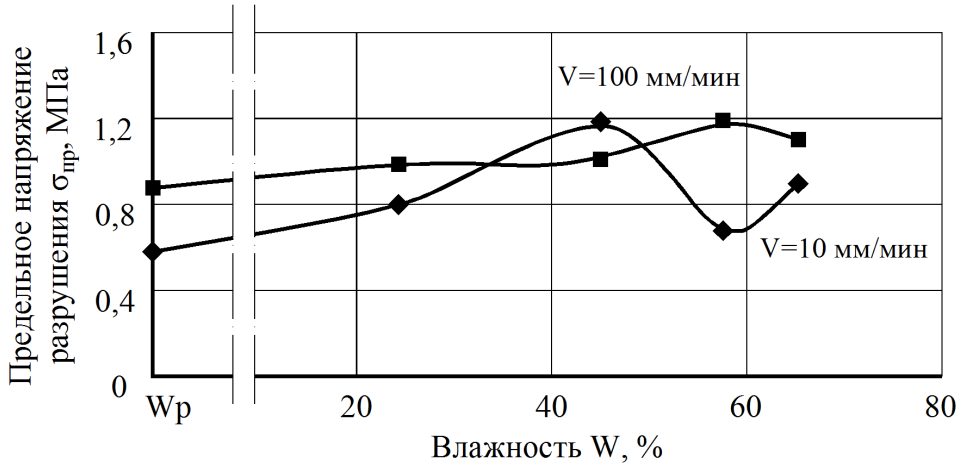


Рис. 6.9 – Зависимость предельных напряжений разрушения $\sigma_{пр}$ от влажности W образцов корня лопуха при сжатии вдоль оси

Влажность материала, близкую к 44%, можно назвать первой критической точкой. При этой влажности происходит резкое изменение скорости сушки, практически заканчивается уменьшение размеров образцов (усушка), а на кривых прочности наблюдаются экстремумы, либо же возрастающая прочность. Несомненно, что при этой влажности заканчивается удаление физически связанной влаги из образцов, преимущественно из межклеточных пространств.

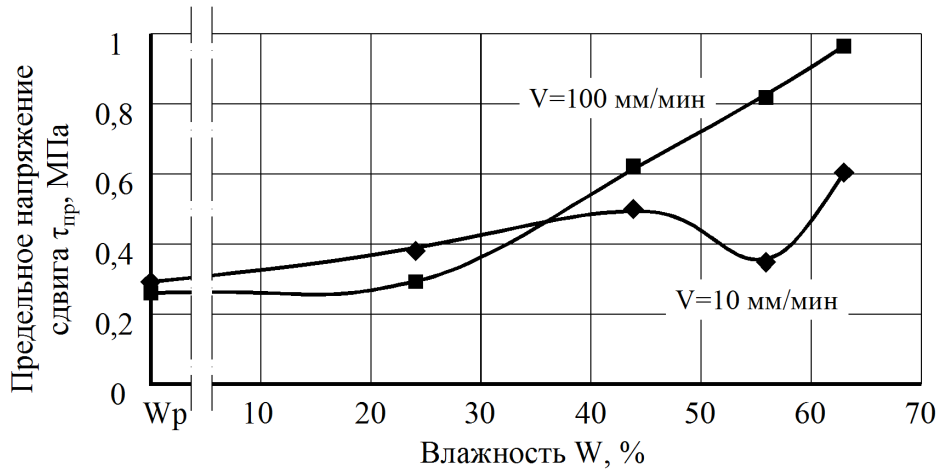


Рис. 6.10 – Зависимость предельных напряжений сдвига $\tau_{пр}$ от влажности W образцов корня лопуха при сдвиге вдоль оси

При квазистатическом сжатии вдоль оси, а также при сдвиге как вдоль, так и поперек волокон прочность образцов достигает максимума. Удаление влаги приводит к формированию более прочного адгезионного взаимодействия

между клеточными структурами растительной ткани, несмотря на отсутствие активной воды, внутренняя энергия вещества повысилась, связная физико-химически с макромолекулами растительной ткани вода повышает не только межклеточную, но и межструктурную прочность образцов.

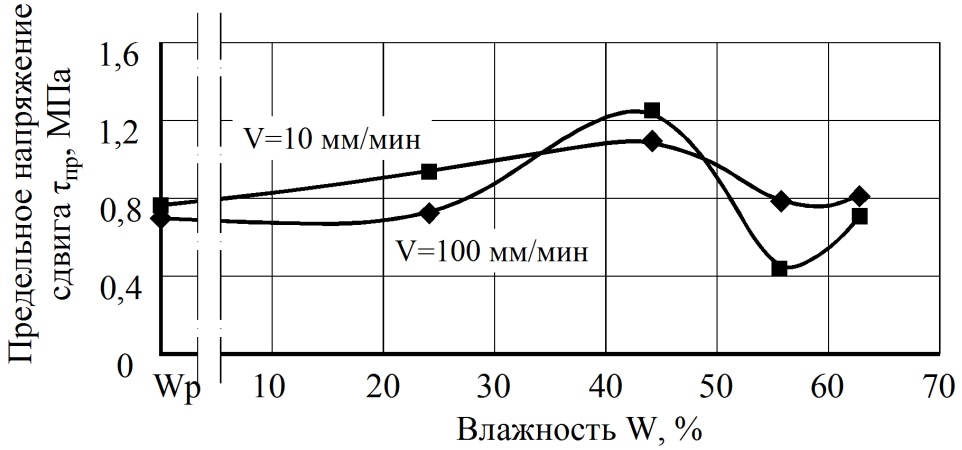


Рис. 6.11 – Зависимость предельных напряжений сдвига $\tau_{пр}$ от влажности W образцов корня лопуха при сдвиге поперек оси

Дальнейшее обезвоживание образцов приводит к стабильному снижению прочности до минимальной при равновесной влажности, и только при сжатии поперек волокон наблюдается рост прочности при повышенной скорости приложения нагрузки. Природа прочности растительной ткани при минимальной влажности, скорее всего, перестает носить адгезионный характер и определяется прочностью целлюлозного каркаса при растяжении, в частности – поперечными связями между макромолекулами биополимеров.

Следует отдельно рассмотреть влияние скорости деформирования образцов на их прочность. В нашем случае испытания проведены при скоростях 10 и 100 мм/мин. При нативной влажности, когда образцы сжимались вдоль оси и при сдвиге поперек оси, десятикратное увеличение скорости привело к более чем двукратному повышению предела прочности. При влажности 56% разность прочностей при различных скоростях увеличилась независимо от вида испытаний. После удаления активной воды разница в деформационном поведении образцов значительно снизилась, особенно при сдвиге.

Интересным представляется сравнение динамики изменения прочностных свойств растительной и животной ткани, например – костной. Костная ткань обладает особенными механическими свойствами: твердость, прочность благодаря особому составу межклеточного вещества. Межклеточное вещество состоит из минеральных солей, в основном солей кальция и фосфора (70%) и органического вещества - белков оссеина и коллагена (30%). Клетки костной ткани – остеоциты, остеобласты, остеокласты**.** Остеоциты – это зрелые костные клетки. Остеобласты – молодые костные клетки, за счет которых кости нарастают в толщину и в длину. Остеокласты – это костные клетки-разрушители, участвующие в перестройке костей. Межклеточное вещество образует костные

пластинки толщиной от 4 до 15 мкм. Структурной и функциональной единицей костной ткани является остеон. Остеон – это система концентрических цилиндрических костных пластинок, вставленных друг в друга. Между пластинками остеона находятся костные клетки. Внутри вдоль остеона лежит канал (гаверсов канал), в котором проходят мелкие кровеносные сосуды. В костях остеоны ориентированы по направлению действия наибольших нагрузок, поэтому остеонное строение придает костям дополнительную прочность. Между остеонами располагаются вставочные костные пластинки. На прочностные свойства кости значительно влияет термическое воздействие. График зависимости ударной вязкости от продолжительности термической обработки представлен на рисунке 6.12. Из графиков видно, что говяжья кость достигает наименьшей прочности после 15 мин. варки, а свиная - после 5 мин. Как объяснить резкое снижение прочности кости в результате термической обработки? Если подходить к этому вопросу с позиции адгезионной природы прочности, то картина становится достаточно ясной.

Белки оссеин и коллаген выступают в костной ткани связующим межклеточным веществом. Молекулы воды активно участвуют в поверхностном взаимодействии молекул белка друг с другом и с другими веществами. Термообработка повышает внутреннюю энергию костной ткани, в том числе энергию

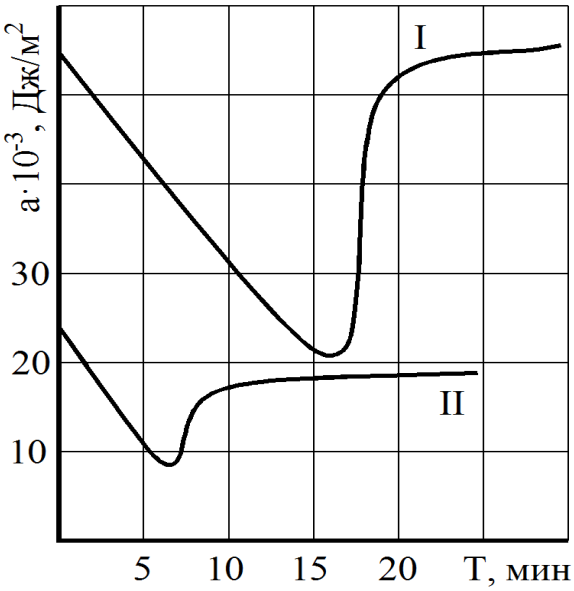


Рис. 6.12 – Зависимость ударной вязкости костной ткани от продолжительности термической обработки : I - говяжья реберная кость, II - свиная реберная кость

молекул воды. Последние освобождаются от внешних связей и выходят в свободное состояние. Общая активность воды увеличивается, адгезионная прочность резко снижается. Дальнейшая термообработка, как видно из графиков, практически восстанавливает прочность костной ткани. Но она меняет свой состав и структуру. Белки подверглись денатурации, влага сохранилась только в химически и частично физико-химически связанном виде. Адгезионная прочность в таком состоянии костной ткани можно объяснить формированием более компактной формы молекул белка, созданием непосредственного межмолекулярного контакта между ними и другими веществами. В таком состоянии кость становится более хрупкой, так как практически исчезает микроподвижность

между минеральными пластинками, межклеточное вещество становится более «жестким», следовательно – хрупким.

Для мышечной ткани представляет интерес, в-первую очередь, ее деформационное поведение в диапазоне положительных температур, при которых происходит технологическая переработка. Физико-механические свойства мышечной ткани характеризуются прочностью, упругостью, эластичностью, вязкостью, липкостью и др. Важными показателями прочности мяса являются напряжения сжатия, растяжения, среза, изгиба, а для замороженного мяса также твердость и ударная вязкость. На деформацию мяса влияет его анизотропность.

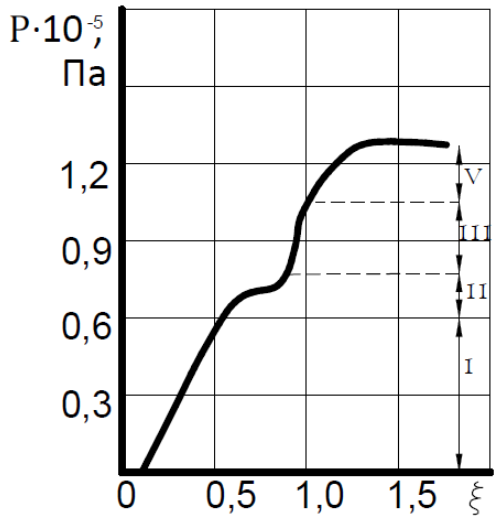


Рис. 6.13 – Зависимость напряжений от деформации при растяжении мышечной ткани

Предел прочности на растяжение является одним из основных показателей прочности мяса. При исследовании упруго-эластично-пластичных свойств мяса методом растяжения (рис. 6.13) отчетливо прослеживается трансформация различных видов деформаций. Участок I характеризует упругую деформацию в соответствии с законом Гука. На участке II происходит частичное изменение структуры мышечных волокон, сопровождающееся упрочнением мяса. Это зона эластично-пластичных деформаций мышечной ткани. На участке III наблюдается упруго-эластичные деформации, переходящие в пластические на участке IV.

6.3.2 Прочностные свойства замороженного связного сырья

Большое количество пищевых материалов резко меняет свои прочностные свойства при отрицательных температурах. Это связано, конечно, с тем, что они содержат вещество, меняющее свое агрегатное состояние. Этим веществом может быть не только вода, но и глицериды различных видов, содержание которых в объектах переработки может быть весьма велико.

Рассмотрим прочностные свойства мышечной ткани, которые сильно зависят от ее температуры. Для мышечной ткани существует две характерные

температуры, которые являются границами проявления различных прочностных свойств (рис. 6.14). Криоскопическая температура $t_{кс}$ = -0,4 °С характеризует процесс кристаллизации свободной влаги. Криогидратная температура $t_{кг}$ = -56°С является точкой замерзания связной влаги. При температуре выше криоскопической мясо ведет себя как упруго-эластично-пластичное тело. В диапазоне температур от -0,4°С до -56°С кристаллизуется свободная влага, снижается пластичность и повышаются упругие свойства мышечной ткани.

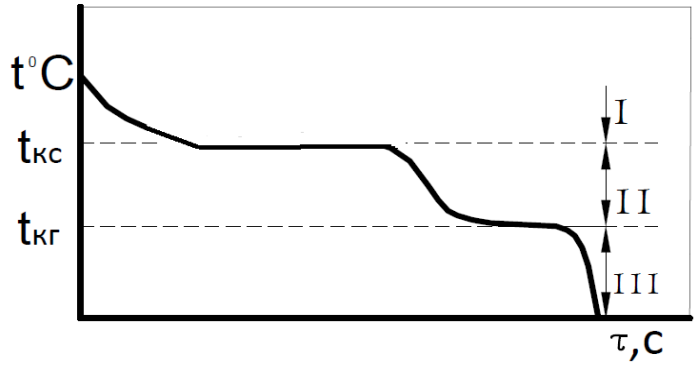


Рис. 6.14 – Термограмма замораживания мышечной ткани

Для изучения деформационного поведения растительной ткани при отрицательных температурах был взят мускатный орех – пряность, широко используемая в качестве вкусовых и ароматических добавок в пищевые продукты. Получение порошка мускатного ореха вызывает большие проблемы, так как он проявляет высокую адгезионную активность и повышенную пластичность.

В промышленности используют как мускатный цвет, так и сам плод – мускатный орех. Его включают в состав пряных смесей: "карри", сиамскую универсальную, болонскую, франкфуртскую, "сухие духи" и др. Мускатное масло входит в состав пряных смесей для колбас, куриных изделий, ароматизации конфет и некоторых типов табака. В пищевой промышленности мускатный орех добавляют в соусы "Южный", "Восток", острый томатный, горчицу "Ароматная". Им ароматизируют вареные и ливерные колбасы, сосиски, печеночный паштет. В составе смесей этой пряностью сдабривают некоторые хлебобулочные изделия. С мускатным орехом готовят пряную и маринованную сельдь, пряную мелкую рыбу, сельдь беломорскую, рыбу горячего копчения.

Семенное ядро (мускатный орех) содержит не менее 3 % (по некоторым сведениям до 10 %) эфирного масла сложного состава (включает пинен, гераниол, овгенол, дипентен, линалоол и др), около 40 % плотного жирного масла, состоящего в основном из триглицеридов миристиновой кислоты (тримиристин), органические кислоты, а также крахмал (около 20 %), пигменты, сапонины, пектиновые вещества. В ариллусе присутствуют эфирное и жирное масла – соответственно 10-15 и 30 %, смолы, слизи, крахмал, краситель.

Определение энергии разрушения для мускатного ореха при низких температурах было вызвано перспективностью использования криоизмельчения этих материалов. Криоизмельчение позволяет значительно увеличить сохранность летучих ароматических веществ в молотом продукте. Особенно актуаль-

ны такие исследования для мускатного ореха в силу очень высокого содержания в нем плотного жирного масла, что значительно затрудняет процесс измельчения.

При низких температурах липиды переходят в твердообразное состояние, и плоды приобретают высокую упругость, разрушаются как хрупкие тела. Исследования проводились при различных температурах образцов. Для определе-

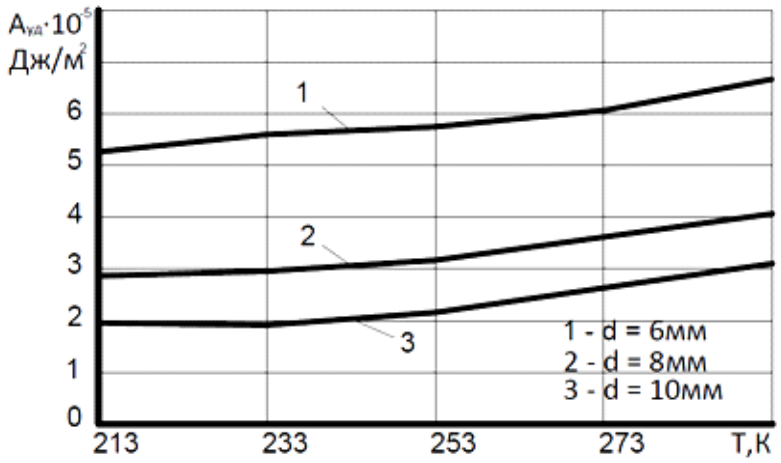


Рис. 6.15– Зависимость удельной работы разрушения $A_{уд}$ образцов мускатного ореха от температуры при испытаниях на вертикальном копре

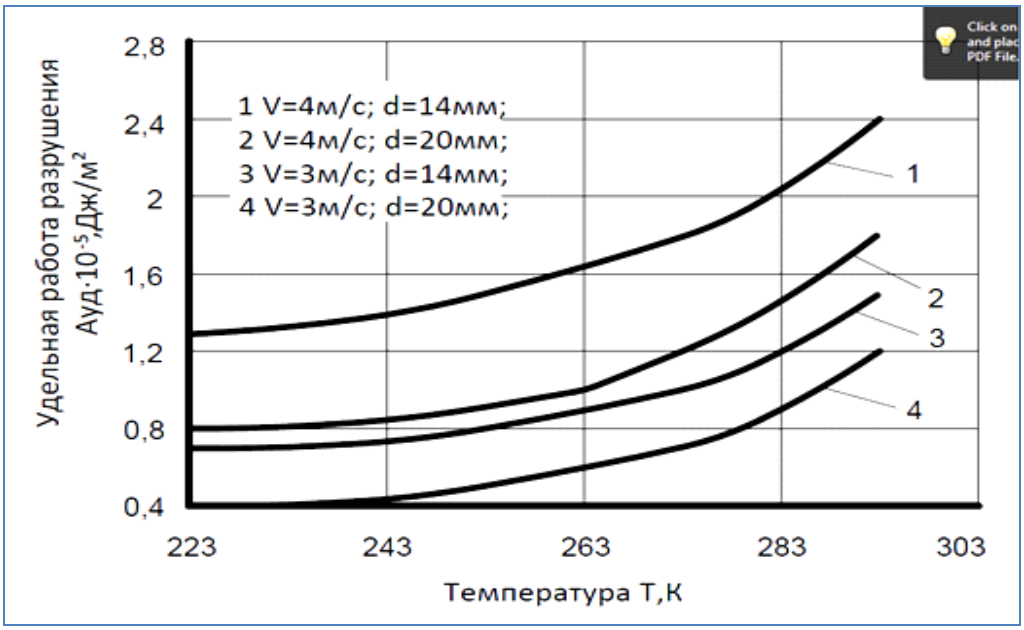


Рис 6.16 – Зависимость удельной работы разрушения $A_{уд}$ мускатного ореха от температуры при испытаниях на маятниковом копре с различными скоростями нагружения

ния температуры брались две равных по величине частицы исследуемого материала, замораживались в жидком азоте. Разрушаемый образец устанавливался

под падающий груз, эталонный образец – рядом вне площади, накрываемой грузом. В эталонном образце через отверстие устанавливалась термопара. Температура образцов постепенно увеличивалась и при достижении величины, при которой осуществляется испытание, груз сбрасывался на образец. Зависимость удельной энергии разрушения от температуры для образцов кубической формы из мускатного ореха, проведенные на вертикальном копре, представлены на рис. 6.15. Как видно по результатам эксперимента, энергия разрушения образцов при понижении их температуры уменьшается. Это легко объясняется с позиций адгезионной прочности растительной ткани разупрочнением структуры в связи с переходом влаги и масел в твердообразное состояние, снижением межклеточного поверхностного взаимодействия.

Испытания целых плодов мускатного ореха проводились динамическим срезом на маятниковом копре. Для обеспечения сдвигового характера нагрузки орех устанавливался в трубку, вторая фиксировалась в установочных плитах копра. В рабочей части (бойке) маятника закреплялась пластина с цилиндрической проточкой диаметром 14 и 17 мм по размерам испытываемых образцов. Варьировались не только размеры образцов, но и скорость удара и температура. Температура устанавливалась способом, описанным выше. Результаты экспериментов представлены на рис. 6.16. Опять же наблюдается снижение удельной энергии разрушения при уменьшении температуры образцов. Увеличение скорости удара также ведет к понижению энергии разрушения. Этот факт объясняется тем, что при увеличении скорости нагружения напряжения в образце не успевают релаксировать, снижается доля пластических деформаций, разрушение становится более хрупким. Это отчетливо наблюдалось по характеру скола образцов. При высоких скоростях поверхность раскола была близка к плоскости.

6.3.3 Экспериментальные исследования прочностных свойств несвязного сырья

К несвязным материалам, согласно классификации, приведенной в разделе 5.10, относится большое количество материалов, это, в первую очередь, семена масличных культур. Исследовались семена льна, рапса и рыжика. Нагружение единичных тел каждой группы сырья осуществлялось при соблюдении одинаковых условий хранения. Поэтому, вследствие неоднородности объектов исследования по компонентному составу, каждая прочностная зависимость и результат измерений определялись как среднее арифметическое суммы значений. Эксперименты по определению предела прочности и модуля упругости одноосным сжатием проводились на "Структурометре" при различных скоростях.

Обработку результатов экспериментов выполняли графическим методом. Построение графиков велось по значениям испытаний, полученным из таблицы усилий, в программе *Excel*. Для анализа прочностных характеристик материа-

лов диаграммы нагружения сжатием пересчитаны в координатах σ–ε. На рисунках 6.17 – 6.21 представлены зависимости σ=f(ε) напряжений сжатия σ от относительной деформации ε образцов при различных скоростях *v*. Преобразование осей координат *F*=f(*N*) провели путём замены шкалы усилий *F* на оси ординат на шкалу напряжений σ, а шкалу частот измерений *N* на оси абсцисс – на шкалу относительных деформаций ε. Вследствие преобразований графики деформационных кривых при сжатии начинают свой отсчёт из точки (0; σ_0).

Анализируя графические зависимости можно сделать вывод, что материалы проявляют упругие свойства с некоторой нелинейностью на отдельных участках. Об этом свидетельствуют близкие к прямым линиям графики зависимостей напряжений сжатия σ от относительной деформации ε. Закон Гука выражает линейную зависимость между напряжением и относительной деформацией. При этом тангенс угла наклона прямолинейного участка к оси абсцисс характеризует модуль упругости исследуемого объекта. Близость к линейному характеру зависимости σ=f(ε) позволяет достаточно достоверно аппроксимировать деформационные кривые зависимостями вида *y*=*a*(*x*) и определить величину среднеквадратичного отклонения R^2.

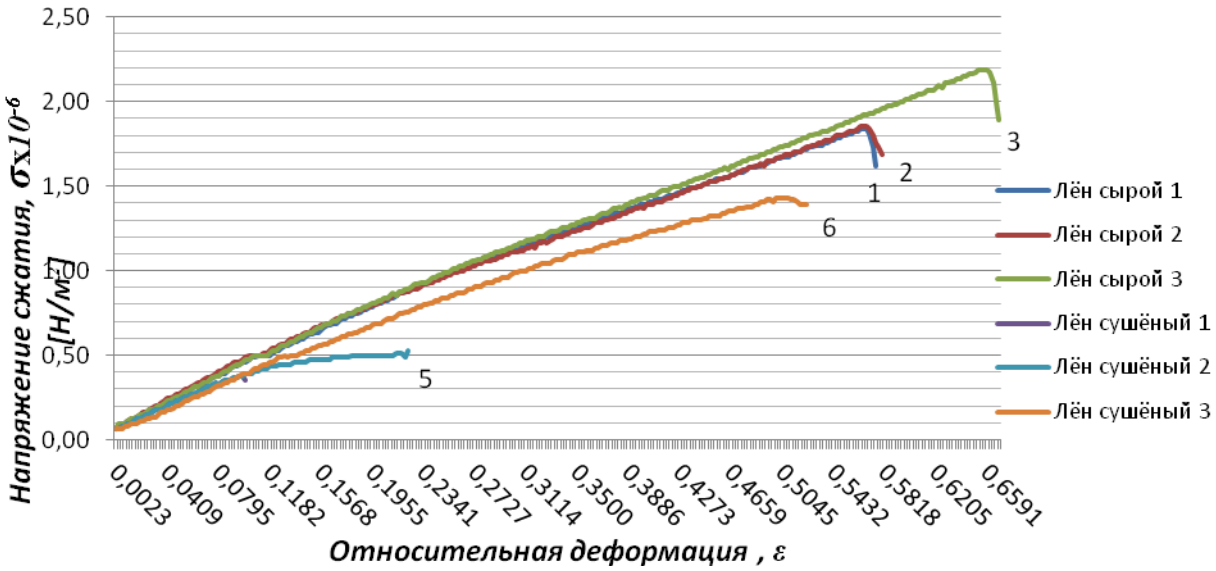


Рис. 6.17 – Зависимости "Напряжения-относительная деформация" для семян льна при скорости нагружения $v = 0{,}83 \cdot 10^{-3}$м/с

На рисунке 6.17 представлены зависимости напряжений сжатия σ для семян льна до разрушения оболочек от относительной деформации ε образцов с различными физическими параметрами при различных скоростях нагружения *v*. Скорости нагружения составили $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$ и $0{,}83 \cdot 10^{-3}$м/с. Как видно из полученных результатов, характер изменения напряжения деформирования сжатием семян льна до разрушения оболочек от относительной деформации ε образцов носит вид возрастающих кривых, имеющих почти линейный характер.

Из рисунка 6.17 видно, что при скорости нагружения $v = 0{,}83 \cdot 10^{-3}$ м/с семян льна сжатием предельное напряжение деформирования до разрушения

оболочки для сушеного семени составило $\sigma_{пр}$ = 1,84 МПа при относительной деформации ε = 0,56, модуль упругости равен *E* = 3,29 МПа; для сырого – $\sigma_{пр}$ = 2,19 МПа при относительной деформации ε = 0,65, модуль упругости равен *E* = 3,37 МПа. Следовательно, для термообработанных семян льна предельное напряжение сопротивления разрушению оболочки меньше, чем для семян, не подвергавшихся термической обработке.

На рисунках 6.18 и 6.19 представлены зависимости напряжений сжатия σ для семян рапса до разрушения оболочек от относительной деформации ε образцов с различными физическими параметрами при различных скоростях нагружения *v*. Скорости нагружения составили $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$; $1{,}67 \cdot 10^{-3}$м/с. Как видно из полученных результатов, характер изменения напряжения деформирования сжатием семян рапса до разрушения оболочек от относительной деформации ε образцов носит вид возрастающих кривых, имеющих почти линейный характер.

Из рисунка 6.18 видно, что при скорости нагружения $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$ м/с семян рапса сжатием предельное напряжение деформирования до разрушения оболочки для сушеного семени составило $\sigma_{пр}$ = 4,24 МПа при относительной деформации ε = 0,22, модуль упругости равен *E* = 19,27 МПа; для сырого – $\sigma_{пр}$ = 1,05 МПа при относительной деформации ε = 0,04,

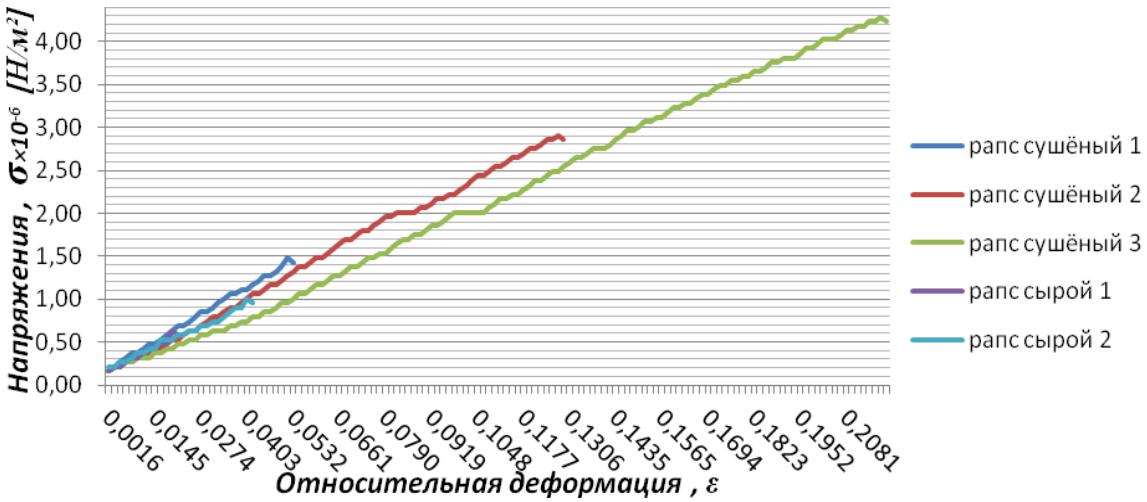


Рис. 6.18 – Зависимости "Напряжения - относительная деформация" для семян рапса при скорости нагружения $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$м/с

модуль упругости *E* = 25,13 МПа. Следовательно, для термообработанных семян рапса предельное напряжение сопротивления разрушению оболочки меньше, чем для семян, не подвергавшихся термической обработке. Однако, из рисунка 6.19 видно, что при скорости $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$м/с нагружения семян рапса сжатием предельное напряжение деформирования до разрушения оболочки для сушеного семени составило $\sigma_{пр}$ = 6,67 МПа при относительной деформации ε = 0,31, модуль упругости *E* = 21,52 МПа; для сырого – $\sigma_{пр}$ = 2,54 МПа при относительной деформации ε = 0,16, модуль упругости *E* = 15,88 МПа. Следова-

тельно, при увеличении скорости нагружения предельное напряжение сопротивления разрушению оболочки увеличивается.

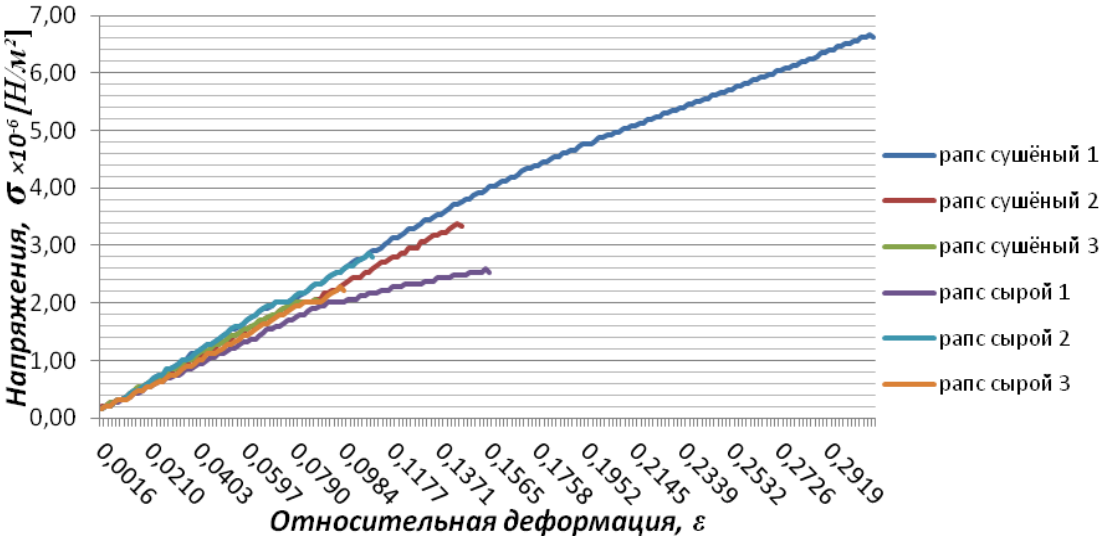


Рис. 6.19 – Зависимости "Напряжения – относительная деформация" для семян рапса при скорости нагружения $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ м/с

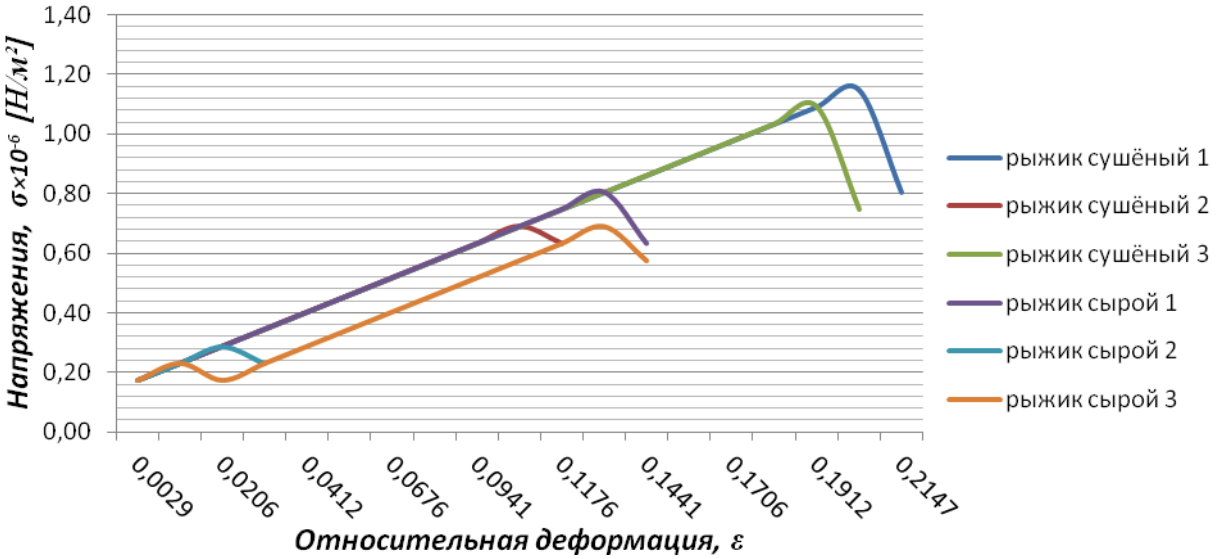


Рис. 6.20 – Зависимости "Напряжения – относительная деформация" для семян рыжика при скорости нагружения $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$ м/с

На рисунках 6.20 и 6.21 представлены зависимости напряжений сжатия σ для семян рыжика до разрушения оболочек от относительной деформации ε образцов с различными физическими параметрами при различных скоростях нагружения v.

Скорости нагружения составили $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$; $1{,}67 \cdot 10^{-3}$ м/с. Как видно из полученных результатов, характер изменения напряжения деформирования сжатием семян рыжика до разрушения оболочек от относительной деформации ε образцов носит вид возрастающих кривых, имеющих почти линейный характер.

Из рисунка 6.20 видно, что при скорости нагружения $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$ м/с семян рыжика сжатием предельное напряжение деформирования до разрушения оболочки для сушеного семени составило $\sigma_{пр} = 1{,}15$ МПа при относительной деформации $\varepsilon = 0{,}20$, модуль упругости $E = 5{,}75$ МПа; для сырых семян $\sigma_{пр} = 0{,}8$ МПа при относительной деформации $\varepsilon = 0{,}13$, модуль упругости $E = 6{,}15$ МПа. Следовательно, для термообработанных семян предельное напряжение сопротивления разрушению оболочки больше, чем для семян, не подвергавшихся термической обработке.

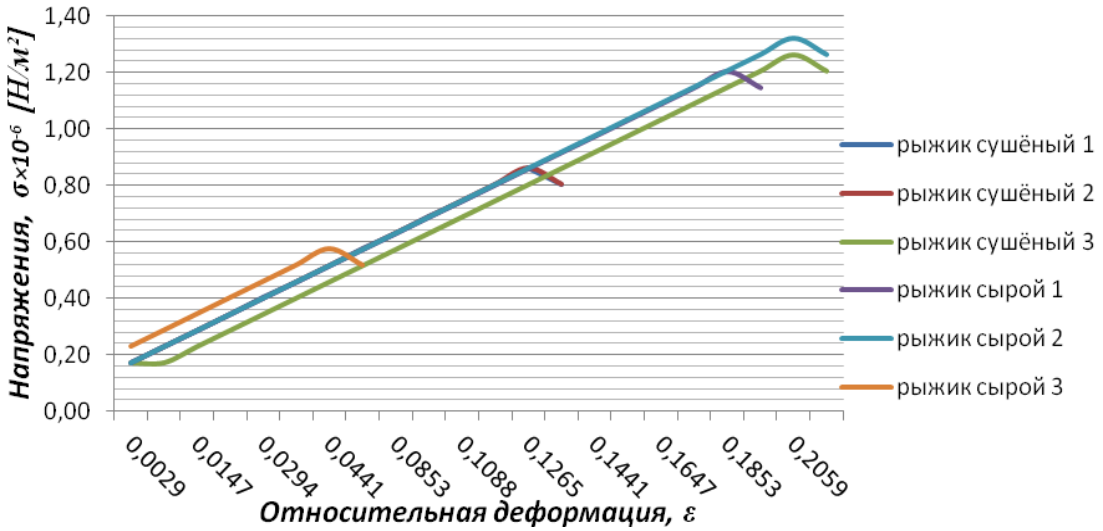


Рис. 6.21 – Зависимости "Напряжения – относительная деформация" для семян рыжика при скорости нагружения $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$м/с

Однако, из рисунка 6.21 видно, что при скорости $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ м/с нагружения семян рыжика сжатием предельное напряжение до разрушения оболочки для сушеных семян составило $\sigma_{пр} = 1{,}26$ МПа при относительной деформации $\varepsilon = 0{,}21$, модуль упругости $E = 6$ *МПа*; для сырых семян – $\sigma_{пр} = 1{,}32$ МПа при относительной деформации $\varepsilon = 0{,}21$, модуль упругости $E = 6{,}29$ МПа. Следовательно, при увеличении скорости нагружения предельное напряжение сопротивления разрушению оболочки увеличивается.

Анализируя результаты исследований прочностных свойств семян масличных культур одноосным сжатием, следует сделать вывод, что они относятся к упругим телам, разрушение которых носит хрупкий характер. Термообработка увеличивает упругие свойства оболочек семян, повышение скорости деформирования пропорционально увеличивает модуль упругости оболочек.

Семена льна подвергли испытаниям на резание. Для резания использовали нож из стали Р8 с углом заточки $26^{0.}$ Пластинчатый нож устанавливался в зажимах «Структурометра СТ-1».

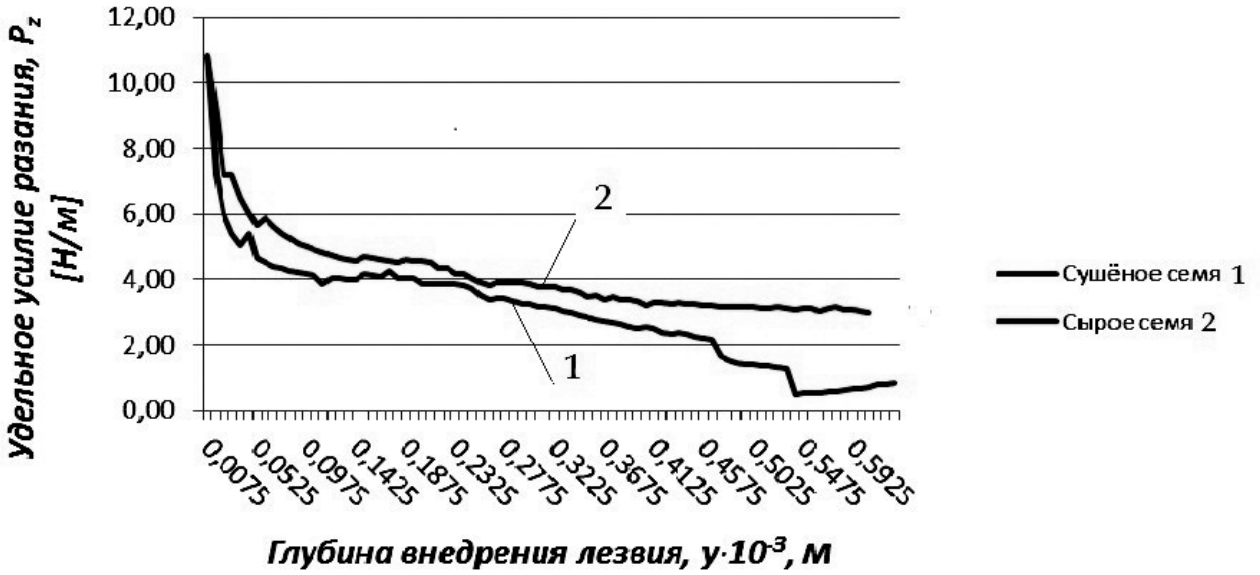


Рис. 6.22 – Удельное усилие резания семян льна при скорости нагружения $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$м/с

На рисунках 6.22 и 6.23 представлены зависимости удельного усилия резания для семян льна от глубины внедрения ножа для образцов с различными физическими параметрами при различных скоростях нагружения *v*. Скорости нагружения составили $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$; $1{,}67 \cdot 10^{-3}$м/с.

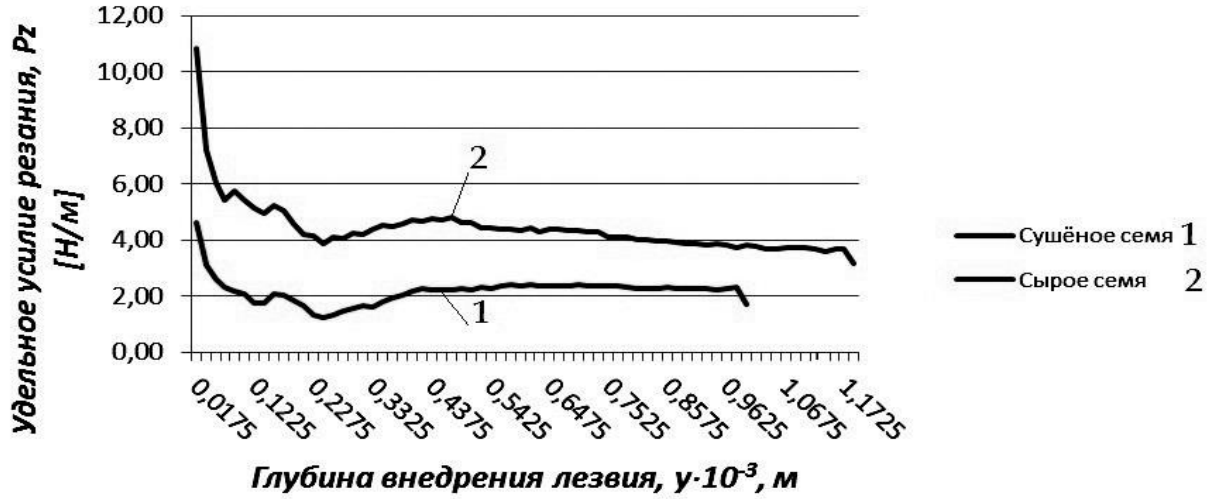


Рис. 6.23 – Удельное усилие резания семян льна при скорости нагружения $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$м/с

Из рисунка 6.22 видно, что при скорости нагружения $v = 0{,}02 \cdot 10^{-3}$м/с семян льна удельное усилие резания P_z для сушеного семени составило $P_z = 5{,}05$

Н/м при глубине внедрения лезвия $y = 0{,}0375 \cdot 10^{-3}$ м; для сырого – $P_z = 7{,}21$ Н/м при глубине внедрения лезвия $y = 0{,}0225 \cdot 10^{-3}$ м. Следовательно, для термообработанных семян удельное усилие резания разрушения оболочки больше, чем для семян, не подвергавшихся термической обработке.

Однако, из рисунка 6.23 видно, что при скорости $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ м/с удельное усилие резания P_z для сушеного семени составило $P_z = 1{,}77$ Н/м при глубине внедрения лезвия $y = 0{,}1225 \cdot 10^{-3}$ м; для сырого $P_z = 5{,}41$ Н/м при глубине внедрения лезвия $y = 0{,}07 \cdot 10^{-3}$м. Следовательно, при увеличении скорости нагружения удельное усилие резания уменьшается.

Анализируя результаты исследований прочностных свойств семян льна рубящим резанием видно, что они относятся к упругим телам, разрушение которых носит хрупкий характер, а термообработка примерно вдвое снижает прочность семян при резании.

Контрольные вопросы

1. Какие параметры являются критериями прочности при квазистатическом и динамическом испытаниях материалов?
2. На чем основан принцип действия Структурометра СТ-1, какие методы измерений в нем использованы?
3. В чем отличие методики испытаний на сжатие от методики испытаний на сдвиг?
4. В каких координатах получают результаты испытаний на Структурометре, и какой зависимостью их надо представлять для изучения особенностей деформационного поведения материалов?
5. Как определяется полная энергия разрушения материала согласно теории академика П.А. Ребиндера?
6. Что представляется ударной вязкостью?
7. В чем отличие методов испытаний прочностных ударных свойств по Изоду и Шарпи?
8. Опишите конструкцию и принцип действия маятникового копра.
9. Какой формулой определяется величина работы, затрачиваемой на разрушение образца?
10. Почему влажность образцов корня лопуха, близкая 44% можно назвать первой критической точкой?
11. Как изменяется прочность растительной ткани при максимальном обезвоживании?
12. Как изменяются прочностные свойства костной ткани при термической обработке?
13. Какая аналогия между прочностными свойствами растительной и животной ткани?
14. Чем объясняется упрочнение костной ткани при продолжительной термической обработке?
15. Поясните деформационное поведение мышечной ткани на примере диаграммы «напряжение – деформация»
16. На примере термограммы замораживания объясните трансформацию свойств мяса.
17. Изложите методику испытаний замороженных образцов на маятниковом копре.
18. Как меняются прочностные свойства семян льна при высушивании?
19. Как меняются прочностные свойства семян рапса при высушивании?
20. Как меняются прочностные свойства семян рыжика при высушивании?
21. Как влияет высушивание на усилие резания семян льна?

Глава 7 ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

7.1 Классификация сыпучих материалов

Сыпучие материалы – совокупность твердых тел, проявляющая специфические свойства, характерные как для жидкостей (текучесть и способность принимать форму сосуда), так и для твердых тел в условиях напряженного состояния, являющиеся дисперсными системами "твердое тело – газ", в которых определяющую роль играют поверхностные силы взаимодействий между частицами (отдельными твердыми телами), а также – соотношение веса частиц и сил поверхностных взаимодействий между ними. Когда исследователями рассматривается напряженно–деформационное состояние сыпучей среды, либо же ее течение, то применяют терминологию теории сплошных сред – напряжение, деформация, вязкость и пр. В этом случае сыпучие материалы терминологически определяют как *сыпучие тела*.

В зависимости от диаметра d частиц сыпучий материал может быть в следующих состояниях: пылевидном (d<0,05мм), порошкообразном (0,05мм < d < 0,5мм), мелкозернистом (0,5мм < d < 2мм); крупнозернистом (2мм < d < 10мм); кусковом (d > 10мм).

Сыпучие материалы – очень широкий класс сырья и полуфабрикатов пищевой промышленности. Это мука, сахар, крахмал, зерно, корнеплоды, карамельные конфеты и т. д. Перечень материалов, являющихся сыпучими, может быть весьма внушительным.

Сыпучая среда является сложной физико-механической системой, изменяющей свои свойства в зависимости от размеров и формы частиц, плотности укладки, влажности, напряженного состояния и т.д.

Наиболее полное описание свойств сыпучих материалов может быть получено с помощью комплексного показателя в соответствии с действующим РТМ 36-01-129-80. Таким показателем является высота устойчивого откоса материала, уплотненного заданной нагрузкой:

$$h_c = \frac{4\tau_0 \cos\varphi}{\rho g(1-\cos\varphi)}, \qquad (7.1)$$

где τ_0– начальное сопротивление сдвигу; φ - угол внутреннего трения; ρ - объемная (насыпная) плотность материала; g – ускорение свободного падения.

По этому показателю классификация сыпучих материалов предусматривает сравнительную оценку предельного состояния материала в условиях переработки. Комплексный показатель устанавливает границу области существования несвязных и связных сыпучих материалов.

На базе комплексного показателя Каталымовым А.В. и Любартовичем В.А (МХТИ им. Менделеева) была предложена инженерно-технологическая классификация сыпучих материалов (таблица 7.1). При составлении классификации принято разделение материалов на классы и группы. Различие между классами

состоит в следующем. К *классу несвязных* отнесены материалы, силы сцепления между частицами которых меньше их веса. В этом случае частицы, если они обладают свободной потенциальной энергией и находятся в состоянии неустойчивого равновесия, способны перемещаться относительно друг друга под действием гравитационных сил. Несвязные материалы обладают сыпучестью, образуют насыпь под углом естественного откоса, способны к истечению через небольшие отверстия. Для несвязных материалов $\tau_0=0$ и $h_c=0$.

В *связных материалах* силы сцепления значительно превосходят вес частиц. Относительное взаимное перемещение отдельных частиц в поле гравитационных сил в таком материале невозможно. Разрушение материала при достижении состояния предельного равновесия происходит по плоскостям сдвига между агрегатами. Связная среда образует вертикальные откосы, имеет склонность к сводообразованию, комкуется, проявляет адгезионные свойства. Для связных материалов величина h_c составляет 0,4 - 1,2 м.

Связно-текучие материалы относятся к переходному классу. В зависимости от плотности укладки частиц они могут проявлять как свойства хорошо сыпучего, так и связного материала.

Таблица 7.1

Классификация сыпучих материалов

Класс	Группа		Характеристики и основные свойства
	Номер	Наименование	
1	2	3	4
Несвязные	I	Кусковые	Кусковые и зернистые сыпучие материалы с размерами частиц более 3 мм, вес частиц значительно превосходит силы сцепления между ними.
	I I	Зернистые	Мелкодисперсные сухие сыпучие материалы, независимо от степени уплотнения образуют углы естественного откоса, способны к гидравлическому истечению через отверстие незначительно (в 5-7 раз) превосходящее диаметр частиц.
Связно-текучие	I I I	Стабильные, неуплотняющиеся	Сухие сыпучие порошкообразные материалы, преимущественно со сферическими или окатанными частицами, низким коэффициентом внутреннего трения, практически не уплотняющиеся и не меняющие физико-механических свойств при естественном длительном хранении.

Продолжение таблицы 7.1

1	2	3	4
Связно-текучие	IV	Слабо-уплотняющиеся	Сухие сыпучие порошкообразные и пылевидные дробленные материалы. В рыхлом состоянии текучи, после уплотнения приобретают связность. Для разрушения связей требуют сравнительно небольшой затраты энергии.
	IV	Средне-уплотняющиеся	Пылевидные сыпучие материалы с гранулами вытянутой игольчатой формы, повышенным внутренним трением и сцеплением. Образуют вертикальные откосы и устойчивые своды.
Связные	VI	Сильно-уплотняющиеся, нестабильные	Материалы, легко уплотняющиеся под воздействием собственного веса, преимущественно с гидростатическими связями между частицами, образующие устойчивые откосы и своды значительных размеров.

Таблица 7.1 служит для ориентировочного расчета оборудования после определения группы перерабатываемого материала, что позволит избежать грубых ошибок при расчете и выборе оборудования.

7.2 Оценка дисперсности сыпучих сред. Распределительная функция

Сыпучий пищевой материал лишь в очень редких случаях состоит из частиц, одинаковых по форме и размерам. Большая часть пищевых и технических сыпучих материалов - это полидисперсные системы, состоящие из частиц, различающихся как формой, так и размерами. Для адекватного описания основного параметра сыпучей среды – размеров ее частиц – используют понятие «гранулометрический состав».

Гранулометрический состав характеризует количественное распределение частиц сыпучего материала по линейным размерам. Определяющим линейным размером может быть принят условный диаметр, вычисляемый как среднее арифметическое $d_i = (b_1 + b_2 + b_3)/3$ или как среднее геометрическое $d_i = \sqrt[3]{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$, где b_i - размеры частиц в трех перпендикулярных направлениях. Оценку гран. состава проводят экспериментально путем разбивки его на классы (фракции) значений d_i, лежащих в пределах от $d_{iн}$ до $d_{iв}$.

Среднее значение фракции:

$$d_i = (d_{iв} + d_{iн})/2, \qquad (7.2)$$

где - d_i средний размер фракции, который называют также эквивалентным диаметром данной фракции.

Число фракций не должно быть менее 5 и больше 20. Величину класса дают в процентах от общего количества анализируемой пробы, причем вместо подсчета числа частиц, попавших в данный класс, определяют их суммарный объем или массу.

С учетом этого, среднее арифметическое значение диаметра частиц в пробе полидисперсного материала может быть вычислено по формуле:

$$d_э = \bar{d}\sum_{i=1}^{k}\bar{d}_i\frac{\overline{M}_i}{\overline{M}} = \sum_{i=1}^{k}\bar{d}_i\frac{C_i}{100}, \qquad (7.3)$$

где M_i - масса частиц i-го класса; M - общая масса анализируемой пробы; C_i - процентное содержание частиц i-го класса в пробе по массе или объему; k - число классов (фракций).

Но средний размер нельзя считать исчерпывающим критерием, т.к. этот критерий может быть одинаков у проб, содержащих различное количество стандартных фракций, и размеры минимальных и максимальных частиц в пробах будут значительно отличаться. В связи с этим, не менее важным является гранулометрический состав и распределительная функция, его описывающая.

Гранулометрический состав может быть представлен графиками или диаграммами различного рода и его задача – проиллюстрировать распределение частиц по размерам, объёму, поверхности, либо количеству в процентном соотношении к пробе сыпучей смеси. В первичном виде гранулометрический состав иллюстрируется гистограммой. *Гистограмма* – набор прямоугольников, в основании которых лежат длины h_r интервалов $[x_{i_r}, x_{i_{r+1}})$, $r = 1,2,..к$, а их высоты определяются равенством $H_r=W_r/h_r$. Величина $W_r=m_r/n$ называется относительной частотой, $\Sigma m_r=1$. Гистограмма представлена на рисунке 7.1. Учитывая, что сумма площадей прямоугольников равна $\Sigma H_r h_r=\Sigma W_r=1$, то гистограмма есть статистический аналог плотности. По гистограмме затем строят кривую распределения, математическое описание этого графика часто называют распределительной функцией.

Обратимся к основам теории вероятности. *Распределительная функция* – это вероятностная функция, сопоставляющая каждому возможному значению d_i её вероятность p_i ($0 \le p_i \le 1$), причём $\Sigma p_i=1$. В технической литературе распределительную функцию подразделяют на интегральную и дифференциальную, причем последняя является первой производной по аргументу от интегральной. Но, проведя дифференцирование, исходя из определения производной, получают «*среднюю вероятность*» на единице длины аргумента, которая является числом, а не функцией. Производную функции распределения следует именовать ее *дифференциальной характеристикой*. Функцией распределения в теории вероятностей называется функция переменной t, выражающая вероятность того, что X в результате испытания примет значение, меньшее, чем число t_0. Из

определения $F(t)=P(X<t)$, где $F(t)$ – функция распределения, X – непрерывная случайная величина. Функция распределения – непрерывно неубывающая, т.е. $F(t_1)\le F(t_2)$ при $t_1\le t_2$ Вероятность $P(t_1\le X\le t_2)$ того, что случайная величина X примет значение в полуинтервале $(t_1; t_2)$ равна $F(t)=P(t_1\le X\le t_2)= F(t_2)- F(t_1)$.

Производная $F'(t)$ функции распределения это *дифференциальная характеристика* распределения непрерывной случайной величины X: $f(t)=F'(t)$. Значения $f(t)$ являются *плотностью вероятности* случайной величины X. Дифференциальная характеристика распределения обладает следующими свойствами: $f(t)\ge 0$ в точках, где существует $F'(t)$, справедливо равенство

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (7.4)$$

Вероятность $P(\alpha\le X\le\beta)$ численно равна площади заштрихованной криволинейной трапеции, ограниченной участком кривой с заданными координатами.

А.Н. Колмогоровым показано, что всякий продукт дробления может быть описан логарифмически нормальным законом распределения. Более поздние исследования утверждают, что если достаточно долго измельчать порцию сыпучего материала, то функция распределения его частиц по размерам максимально приближается к нормальному закону распределения Гаусса, дифференциальная форма которого представляется выражением:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}, \qquad (7.5)$$

где σ и a - некоторые параметры (в случае дисперсного анализа сыпучей среды – линейные размеры).

Зависимость графика $f(t)$ от параметров a и σ такова: a является абсциссой максимума функции; малым σ соответствует крутой горб кривой, большим σ – пологий горб. Точки с абсциссами a-σ и a+σ являются точками перегиба.

Исходя из определений, нетрудно сделать вывод, что параметр a для пробы сыпучего материала является средним размером "пиковой" фракции, т.е. фракции, содержание которой максимально. Размер этой фракции может быть заданным, номинальным размером сыпучей среды или же целевой фракцией при дезинтеграции какого-либо материала. В случае дисперсионного анализа сыпучей среды параметр a – это номинальный (заданный технологическими требованиями) среднемассовый размер частиц $\bar{d}$. Величина σ является среднеквадратичным отклонением размера частиц. Вероятность попадания случайной величины в диапазон $[a \pm 3\sigma]$ составляет примерно 0,997. Если принять $3\sigma = \Delta$, где $\pm\Delta$ - диапазон заданного отклонения от номинала, то, описывая распределение частиц сыпучей массы по размерам нормальным законом, можно считать, что практически все частицы (99,7%) имеют размеры в диапазоне $\bar{d} \pm 3\sigma$. Важны ли не попавшие в диапазон 0,3% частиц? Чаще всего неважны, пищевая технология вполне допускает подобные отклонения, которые могут быть списаны на вполне допустимые погрешности измерений.

Проанализируем формы распределительных функций различных сыпучих сред с одинаковым средним размером их частиц, но различными диапазонами размеров частиц в пробах (рисунок 7.1). Специалисты по измельчению гранулометрический состав с функцией $f_1(x)$ называют "узким", а с функцией $f_2(x)$ – "широким".

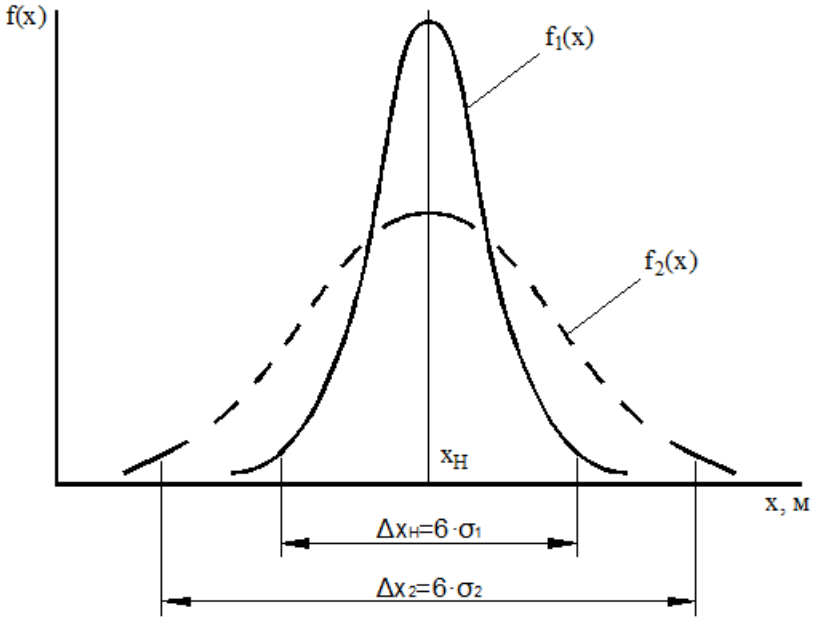


Рис. 7.1 – Кривые плотности нормального распределения сыпучего материала

Представим в общем виде, что в результате работы двух измельчителей один и тот же исходный сыпучий материал разрушается по-разному, т.е. характеристики распределения продуктов измельчения различны и соответствуют $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на рисунке 7.1 Технологическими требованиями задан средний размер сыпучей среды после измельчения – $\bar{d}$, с регламентированными отклонениями ±3σ, т.е. $\bar{d}$ ±3σ. В указанный диапазон попадет 99,7% частиц, что можно считать вполне приемлемым. Измельчитель *I* производит сыпучий материал, полностью соответствующий технологии. Сыпучий продукт, полученный измельчителем *II*, не соответствует регламентируемому отклонению. Частицы сыпучей смеси, размеры которых превышают $\bar{d}$ +3σ должны быть удалены каким-либо способом разделения и подвергнуты повторному разрушению, что влечёт за собой дополнительные производственные затраты. Частицы, размеры которых меньше $\bar{d}$ –3σ являются переизмельчёнными, не соответствующими технологическим требованиям и их необходимо удалить, таким образом, эта часть продукта измельчения является браком, необратимыми потерями.

На практике крайне редко измельченный сыпучий материал соответствует нормальному, симметричному относительно целевой фракции, закону распределения. На рисунке 7.2 представлены кривые соответствующие реальным характеристикам распределения частиц сыпучего материала после измельчения.

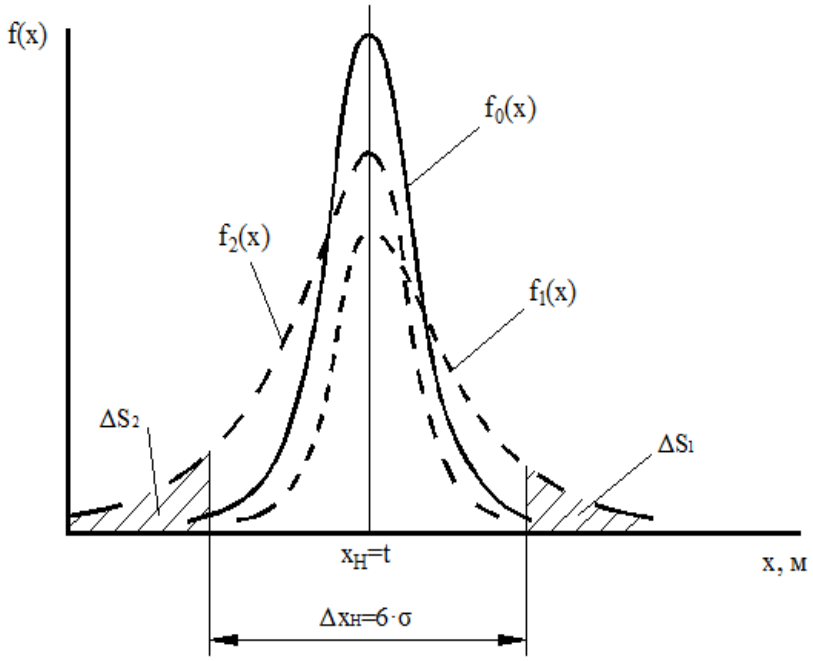


Рис. 7.2 – Приближенные к реальным дифференциальные характеристики распределения сыпучих материалов после измельчения

Дифференциальная характеристика $f_0(x)$ соответствует требуемому качеству сыпучего материала, установленного технологическими регламентами. Задан номинальный размер частиц $x_H=t$ в интервале Δx_H.

Функция $f_1(x)$ описывает распределение недоизмельченного материала, функция $f_2(x)$ – переизмельченного материала, причем в каждом из распределений модой пиковой фракции является x_H.

Проведём оценку полученного сыпучего материала установленному качеству. Доля материала, не соответствующая качеству, определится соотношением:

$$B_1 = \frac{\Delta S_1}{S_0}, \quad B_2 = \frac{\Delta S_2}{S_0} \quad , \tag{7.6}$$

где S_0 – площадь, ограниченная кривой $f_0(x)$ в диапазоне $\Delta x_H = 6\sigma$, ΔS_1, ΔS_2 – площади, ограниченные соответствующими кривыми, а также ординатами $\Delta x_H \pm 3\sigma$ и осью абсцисс.

Нетрудно сделать вывод, что если $B \to 0$, то и качество измельчения повышается, а измельченный материал все более соответствует требуемому качеству продукта.

Исходя из вышесказанного, предлагается ввести критерий оценки качества дисперсной среды, полученной рассеянием или разрушением в каком-либо устройстве:

$$C = \frac{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x - B}{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x}, \qquad (7.7)$$

где определенный интеграл соответствует площади, ограниченной графиком дифференциальной характеристики номинального продукта; $X_{\max}$, $X_{\min}$ - предельные максимальный и минимальный размеры частиц, заданные номинальным отклонением ±3σ.

Или, исходя из свойств дифференциальной характеристики распределения $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$, будем считать, что значение интеграла в (4) близко к единице и выражение упрощается:

$$C = 1 - B, \qquad (7.8)$$

где B - определена из (7.6) и является долей сыпучего материала, частицы которой не соответствуют регламентированному размеру x_H±3σ.

Авторами пособия предложена следующая *методика оценки качества сыпучей среды.*

1. Проводится разделение пробы дисперсной среды на фракции, определяется дисперсный (гранулометрический) состав.
2. Находятся плотности распределения вероятности для каждой фракции отношением ее доли в пробе к диапазону фракции (разности между верхней и нижней границами), строится кривая распределения – дифференциальная характеристика функции распределения.
3. По заданному среднему размеру $\bar{d} = a$ и допускаемому отклонению от номинала $a \pm 3\sigma$ в тех же осях строится график плотности вероятности нормального закона распределения.
4. Определяется интегральный критерий соответствия сыпучего материала требуемому качеству выражением $C=1 - B$, где B – площади условных прямоугольных треугольников, вершины прямых углов которых являются абсциссами верхнего и нижнего предельного отклонения размеров от номинала, а гипотенузы – спрямленные линии кривой распределения, не попавшие в заданный диапазон. При полном соответствии качеству $C = 1$.
5. Вычисляется критерий Пирсона χ^2, который позволяет определить соответствие распределительной функции пробы сыпучей среды нормальному закону распределения

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - m_i')}{m_i'}, \qquad (7.9)$$

где n – число фракций; m_i и m_i' - соответственно эмпирические и теоретические частоты рассматриваемого распределения, i – номер фракции.

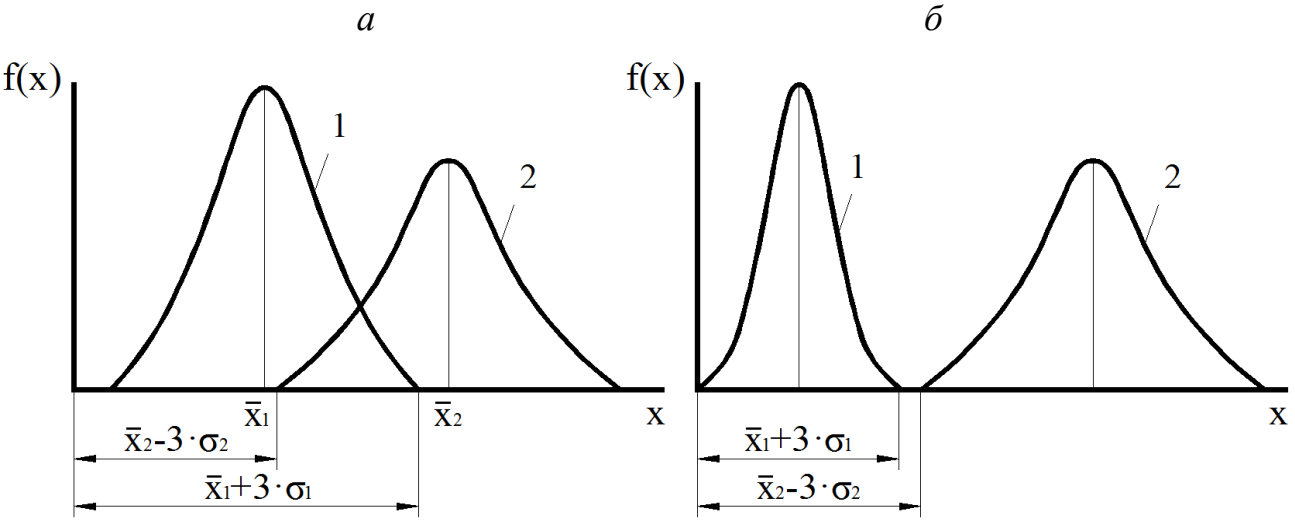


Рис. 7.3 – Определение делимости компонентов смеси
по кривым плотности распределения:
а – не полностью делимая смесь; б – полностью делимая смесь;
1, 2 – компоненты смеси

Если проводится селективная дезинтеграция, то в результате получают дисперсную среду, имеющую бимодальную (как минимум) характеристику функции распределения частиц по размерам. Оценку качества дезинтеграции, кроме предложенных выше критериев, следует проводить и по разделимости компонентов смеси по фракционному составу (рисунок 7.3). При условии, что вариация любого признака, в нашем случае – распределение размеров частиц, подчиняется нормальному закону, получим, что весь диапазон изменения признака лежит в пределах от $d+3\sigma$ до $d-3\sigma$, где d – среднее арифметическое значение изучаемого признака; S – его эмпирическое среднеквадратичное отклонение. Рассчитав значения этих параметров вариационных рядов для каждого из компонентов смеси, определим наличие величину Δ, характеризующую расстояние между ними. Параметр Δ можно назвать критерием селективности дезинтеграции. При $\Delta > 1$ имеем полностью делимую смесь, при $\Delta < 1$ смесь не может быть полностью разделена по данному признаку, то есть, положительный критерий характеризует высокое качество процесса. Величина Δ (рисунок 7.3) определяется выражением:

$$\Delta = \frac{(d_2 - d_1)}{3(\sigma_1 + \sigma_2)}, \qquad (7.10)$$

где индекс – это номер компонента ($d_2 > d_1$).

Предлагаемые критерии позволят не только оценивать качество сыпучих сред, но и работу оборудования для дезинтеграции и диспергирования. Так, например, если график распределительной функции сдвинут вправо от моды

нормального закона (право ассиметричен), то необходимо повысить количество энергии, подводимой к материалу; если график лево ассиметричен, то наоборот – понизить. Пофракционное отклонение распределительной функции (формула 7.9) от нормального закона распределения дает возможность детально проанализировать особенности разрушения материала, связать фракционный состав с морфологическими, прочностными особенностями перерабатываемого материала и произвести точную настройку оборудования с целью получения максимально высокого качества процесса.

В тоже время использование нормального распределения в диапазонах малых значений размеров нежелательно вследствие того, что оно допускает отрицательное значение распределенной величины, что является недопустимым при расчетах. Например, возможна ситуация когда при относительно небольшом среднем размере измельченного материала $d_{ср}$ часть распределения $d_{ср}$-3σ будет расположена в отрицательной области (рисунок 7.4). Поэтому, на наш взгляд необходимо использовать другие функции распределения, ограниченные снизу, например, распределение Вейбулла:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{x-x_{\min}}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{[x-x_{\min}]}{\beta}\right)^{\alpha}\right), \qquad (7.11)$$

где α – масштабный параметр; β - параметр формы; $x_{\min}$ – минимальное значение x.

Распределение Вейбулла довольно популярно, в частности, его используют при оценке прочности материалов, применяют для описания различных времен жизни, при оценке надежности, для описания силы ветра, интенсивности дождя, различных аспектов здравоохранения, прорастания семян, продолжительности простоев в промышленности, мигрирующих систем и характеристик гроз.

Распределение Вейбулла в зависимости от параметров (масштаб и форма) позволяет менять свой вид. Моменты случайной величины X, имеющей распределение Вейбулла имеют вид:

$$\mu(x^n)=\beta^n\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right); \qquad (7.12)$$

где: Г – гамма-функция $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Параметры распределения Вейбулла:

– математическое ожидание $\mu=\beta\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right);$

– дисперсия $D=\beta^2\cdot\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\mu^2.$

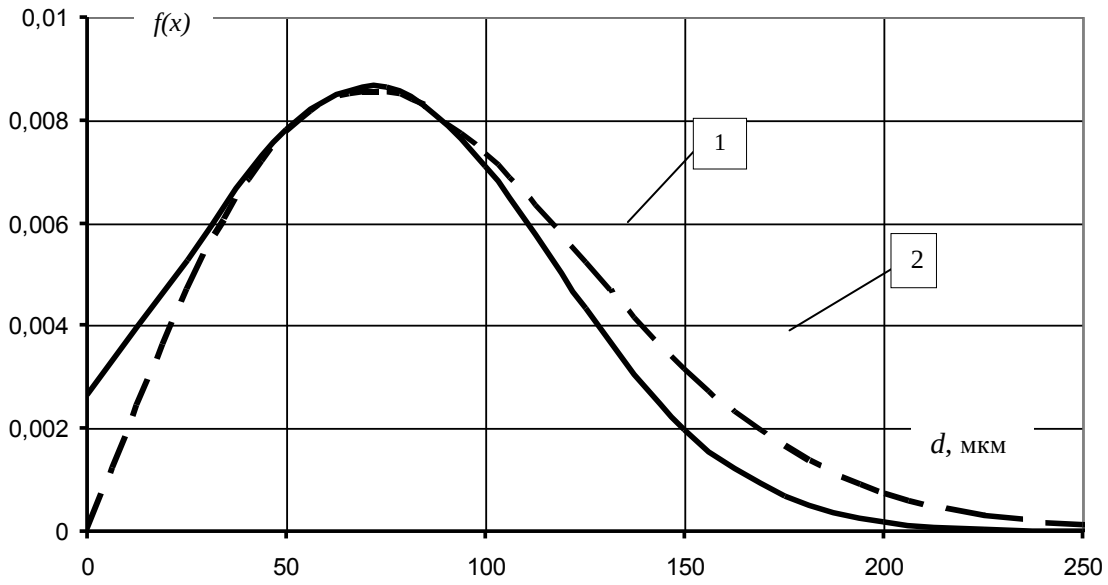


Рис. 7.4 – Сравнение функций распределения в диапазоне:
1- малых размеров (до 250 мкм);
2- нормальное распределение с параметрами d = 71; σ = 46;
3- распределение Вейбулла (α = 2, β = 100, dmin = 0)

Вышеизложенное позволяет рекомендовать использовать распределение Вейбулла в диапазонах малых размеров вместо функции распределения Гаусса, а также совместно с ней (на разных участках графика функции распределения) для оценки качества полимодальных дисперсных систем по предлагаемой методике.

Большое значение имеет такой параметр сыпучего материала, как *удельная поверхность*. Теоретически он определяется приближенной формулой

$$S_y = \frac{S}{V}, \qquad (7.13)$$

где S_y - удельная поверхность частицы, равная отношению поверхности S частицы к ее объему V.

В экспериментальной практике значение S_y определяют применительно к сравнительной большой порции сыпучего материала, состоящей из множества частиц. В этом случае формула (7.13) позволяет рассчитать средний диаметр частиц исследуемой порции сыпучего материала. Параметр S_y определяют на специальном приборе; принцип его действия основан на измерении сопротивления, которое оказывает слой определенной порции сыпучего материала потоку прокачиваемого через него газа. Параметр S_y используют для характеристики свойств сыпучего материала в случаях, когда они зависят от площади поверхности его частиц; например, теплопроводность, звукопроницаемость, растворимость, химическая активность во многом зависят от S_y. Значения S_y меняются в большом диапазоне (от нескольких сотен тысяч до нескольких миллионов $м^{-1}$) в зависимости от степени дисперсности частиц.

7.3 Плотность и объемная (насыпная) плотность. Физические свойства сыпучих сред

Основным физическим свойством материала является плотность среды, из которой он состоит.

Плотностью ρ материала сыпучей среды называют массу единицы объема вещества, из которого состоят частицы. Согласно ГОСТ 5181-78 плотность определяют пикнометрическим методом.

Насыпной плотностью $\rho_н$ сыпучего материала называют массу единицы объема, занимаемого материалом при свободном засыпании его в измерительный стакан. Значение $\rho_н$ определяют для сыпучих продуктов по ГОСТ 11035-64 (СТ СЭВ 16917979), а для металлических порошков - по ГОСТ 19440-74 (СТ СЭВ 2283-80). Насыпная плотность сыпучих материалов изменяется в широком диапазоне (от 0,2 до 4г/см^3) в зависимости от дисперсного состава частиц, их формы, плотности и способа засыпки в емкость.

Порозностью слоя сыпучего материала называют отношение:

$$\varepsilon = V_1/V_0 \qquad (7.14)$$

где V_1 - свободный объем пространства между частицами в слое сыпучего материала объемом V_0.

Величина ε зависит от способа укладки частиц, их формы, размера, воздействия внешних факторов. Например, под действием вибрации ε может изменяться для одного и того же сыпучего материала в 1,1—3,0 раза.

Значения ε, ρ и $\rho_н$ связаны простой зависимостью

$$\varepsilon = 1 - \rho/\rho_н. \qquad (7.15)$$

Изменение структуры слоя под действием сжимающей нагрузки характеризуют коэффициентом уплотнения:

$$K_y = \rho_{пр}/\rho_н\ , \qquad (7.16)$$

где $\rho_н$ и $\rho_{пр}$ насыпная плотность порции сыпучего материала соответственно начальная и после прессования.

Кроме плотности к физическим свойствам относят влажность и гигроскопичность.

Влажность сыпучих материалов влияет на многие их свойства: сыпучесть, коэффициенты внутреннего и внешнего трения, плотность и т.д.

Связь влаги с материалом может быть механической, физико-химической, химической. Влага, находящаяся между частицами материала и на их поверхности, имеет механическую связь с материалом. Физико-химическую связь с материалом имеет та влага, которая проникает в поры частиц за счет адсорбции или диффузии. Химически связной является влага гидратная или кристаллизационная.

Для характеристики количества влаги, содержащейся в сыпучем материале, используют два понятия: влажность и влагосодержание или относительную

и абсолютную влажность.

Гигроскопичность – свойство сыпучего материала сорбировать парообразную влагу из воздуха.

$$W_{\text{п}} = [(m_{\text{в}} - m_{\text{с}})/(m_{\text{с}} - m_{\text{б}})]100, \quad (7.17)$$

где *W*п - максимальная гигроскопичность, %; $m_{\text{в}}$, $m_{\text{б}}$, $m_{\text{с}}$ – масса соответственно пробы сыпучего материала с бюксой, бюксы и бюксы с высушенной пробой сыпучего материала.

Бюксу с пробой сыпучего материала помещают на 1-2 суток в эксикатор, на дне которого находится раствор H_2SO_4. В эксикаторе устанавливается равновесное состояние влажности сыпучего материала в воздухе с относительной влажностью водяного пара при температуре 20°С до 95—98%.

7.4 Поверхностные явления в сыпучих средах

Между частицами сыпучего материала существуют силы взаимодействия различной природы. Эти силы объединяют термином - *«аутогезия»*. Понятие аутогезии охватывает все виды и формы связи между частицами независимо от числа и свойств взаимодействующих частиц, природы сил, обусловливающих это взаимодействие, причин и условий их возникновения. Помимо этого основного термина в технической литературе применяют и другие термины: адгезия, когезия, агломерация, агрегация, слеживаемость. Понятие адгезии и когезии были рассмотрены выше (раздел 5.8)

Агломерация — процесс укрупнения частиц в результате спекания;

Агрегация — самопроизвольное укрупнение частиц;

Слеживаемость — возникновение сил взаимодействия между частицами в результате появления кристаллизационных мостиков между частицами или возникновения капиллярных сил.

Силу аутогезии можно представить в виде суммы нескольких составляющих: сил Ван-дер-Ваальса и сил когезионного взаимодействия, имеющих молекулярную природу, а также сил электрических, механического сцепления частиц и капиллярных (для влажных сыпучих материалов).

Адгезия частиц сыпучих масс обусловлена образованием связи между частицами и поверхностью и формированием прилипшего слоя частиц. Возможность образования прилипшего слоя определяется величиной сил адгезии.

Силы адгезии отдельных частиц только в некоторых (сравнительно редких) случаях могут быть найдены расчетным путем. Чаще для определения силы адгезии прибегают к эксперименту. На прилипшие частицы действует внешняя сила, которая обозначается через $F_{\text{отр}}$. Величина этой силы равна силе адгезии, но направлена противоположно ей. Численное значение сил отрыва и определяют количественно адгезию частиц. Чем больше эти силы, тем значительнее адгезия и тем труднее удалить прилипшие частицы.

Силы адгезии в отношении массы сыпучего материала $F_{ад}^{N}$ аналогично силе адгезии отдельных частиц $F_{ад}$ определяется по величине внешней силы $F_{отр}^{\tau}$, которая действует нормально к поверхности. Если такой отрыв можно осуществить в отношении отдельных частиц, то для массы, а особенно для слоя сыпучего материала, сделать достаточно сложно. В связи с этим чаще определяют адгезию методом сдвига, т. е. путем приложения внешней силы $F_{отр}^{\tau}$, действующей тангенциально к твердой поверхности (рис. 7.5). Под действием внешней силы $F_{отр}$ слой сыпучего материала начинает двигаться относительно твердой поверхности, т. е. линии АА, при этом возникает трение.

Как известно, одним из основных законов трения является *закон Амонтона*, согласно которому сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления. Под действием внешней силы $F_{отр}$ преодолевается сила трения, когда нормальное давление на слой частиц равно $P_к$, поэтому закон Амонтона для слоя частиц можно представить в виде

$$F_{отр}^{\tau} = \mu P_к \quad . \tag{7.18}$$

Величину $F_{отр}^{\tau}$ называют усилием или напряжением сдвига, а в случае движения сыпучей массы – предельным напряжения сдвига.

Коэффициент пропорциональности μ называют коэффициентом трения, в данном случае коэффициентом внешнего или граничного трения слоя частиц. Слово «внешнее» подчеркивает, что речь идет о трении сыпучего материала при движении его по поверхности, т.е. трение является внешним по отношению

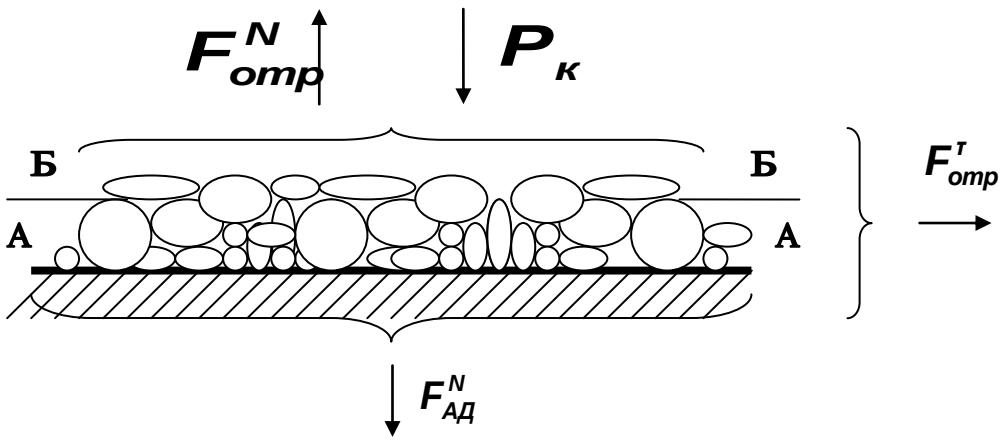


Рис 7.5 – Адгезия, сдвиг и отрыв прилипшего слоя частиц

к сыпучей пищевой массе. Величина $P_к$ может быть вызвана массой вышележащего слоя сыпучего материала или внешней нагрузкой. Если, например, рассматривается давление муки на стенки бункера, то подобное давление определяется высотой слоя муки в этом бункере.

Зависимость между $F_{отр}^{\tau}$ и $P_к$ (рис. 7.6) характеризуется не прямой 1, а прямой 2, которая расположена выше. Сдвиг сыпучего материала относительно *АА* произойдет в том случае, если будет преодолено сопротивление сдвигу силой $F_{отр}^{\tau}$. Помимо трения между частицами сыпучего материала и поверхностью

возникает адгезия. Сила адгезии $F_{ад}^{N}$ действует перпендикулярно площади контакта. Это показано на рис.7.6.

Сила адгезии прижимает частицы к поверхности, и в этом случае она эквивалентна внешнему давлению, поэтому сила адгезии является дополнительным фактором, который оказывает давление на частицы. Кроме внешнего воздействия на слой частиц будет действовать дополнительное давление, которое можно рассматривать как следствие адгезии $F_{ад}^{N}$.

Предельное напряжение сдвига $F_{отр}^{\tau}$ и нормальное давление $P_к$ относят к единице площади перемещения сыпучего материала. Обе эти величины имеют размерность Па (или Н/м^2).

С учетом адгезии для сыпучих пищевых масс связь между усилием сдвига и нормальным давлением можно представить в виде

$$F_{отр}^{\tau} = \mu \cdot (P_к + F_{ад}^{N}) \qquad (7.19)$$

Суммарно нормальное давление в плоскости перемещения обусловлено внешним давлением и адгезией, т. е. $P_к + F_{ад}^{N}$.

Таким образом, адгезия связана с трением. Усилие сдвига сыпучего материала обусловлено адгезией и внешним давлением. Количественно трение характеризуется коэффициентом внешнего трения, величина которого определяется углом наклона прямой 2 на рис. 7.6

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = F_{отр}^{\tau} / P_к \qquad (7.20)$$

Теперь рассмотрим движение сыпучей пищевой массы относительно себе подобных частиц, когда перемещение осуществляется по линии ББ (см рис. 7.5).

Все предыдущие рассуждения приемлемы для случая движения частиц внутри самой сыпучей массы. Решающее значение в этих условиях приобретает *аутогезия*, т. е. взаимодействие частиц между собой. Трение будет препятствовать относительному перемещению частиц сыпучей массы.

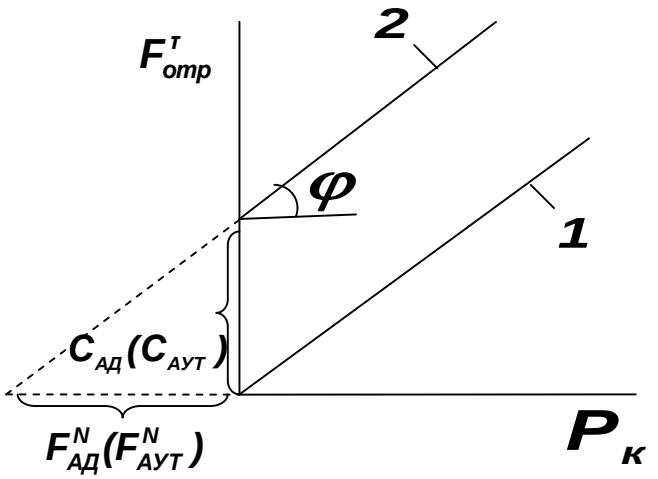


Рис. 7.6 – Зависимость усилия сдвига от нормального давления:
1 - при отсутствии адгезии (аутогезии);
2 - под действием адгезии (аутогезии)

Аутогезия, как и адгезия, вносит поправки в закон трения. Двучленный закон трения аналогично уравнению (7.8) можно представить следующей формулой:

$$F_{\text{отр}}^{\tau} = \mu_{\text{вн}} \cdot (P_{\text{к}} + F_{\text{АУТ}}^{N}), \qquad (7.21)$$

где $\mu_{\text{вн}}$ - коэффициент внутреннего трения, $F_{\text{аут}}{}^{N}$ - сила аутогезии между частицами, Па.

Слово «внутреннее» означает, что речь идет о трении частиц при их взаимном перемещении, т. е. внутри сыпучей пищевой массы.

Сила аутогезии подобно силе адгезии действует перпендикулярно плоскости перемещения сыпучей массы, прижимает частицы друг к другу и в этом смысле эквивалентна внешнему давлению.

Вернемся еще раз к прямой 2 на рис. 7.6, которая определяет связь между $F_{\text{отр}}{}^{\tau}$ и $P_{к}$, но в данном случае применительно к уравнению (7.10). Отрезок, отсекаемый на оси абсцисс, будет равен величине $F_{\text{аут}}{}^{N}$, а величина ординаты характеризует сцепление $C_{\text{аут}}{}^{N}$:

$$C_{\text{отр}} = \mu_{\text{вн}} \cdot F_{\text{аут}}^{N} \qquad (7.22)$$

Формулы (7.18–7.22) показывают, что адгезия и аутогезия связаны с трением. Адгезия (аутогезия) проявляются при разъединении тел, а трение – при их взаимном перемещении. Для осуществления этого перемещения необходим сдвиг одного тела относительно другого.

7.5 Методы исследований поверхностных свойств сыпучих материалов

Широкое применение сыпучих материалов порождает большое число методов исследования их свойств. Рассмотрим лишь те методы определения параметров адгезии, аутогезии и трения, которые оригинальны и специфичны в отношении сыпучих пищевых масс и применяются на практике в пищевой промышленности.

Все методы определения адгезии и аутогезии, а также трения сыпучих пищевых масс можно разделить на прямые и косвенные. Прямые методы позволяют непосредственно измерить параметры, характеризующие адгезию, аутогезию и трение, в совокупности или в отдельности. При помощи косвенных методов получают относительные величины, которые связаны с адгезией и аутогезией. Эти величины зависят от условий их определения, особенностей и конструкции применяемых приборов и других факторов. Получаемые величины сопоставимы только в определенных условиях: идентичность применяемой аппаратуры и соблюдение аналогичных условий измерения. Большая группа прямых методов основана на использовании и измерении внешней силы. При помощи этих методов можно измерить силу адгезии или аутогезии отдельных частиц. Методы основаны на отрыве частиц под действием внешней силы, причем внешняя сила отрыва может одновременно действовать на все прилипшие

частицы, которые находятся на поверхности. К числу этих методов относится отрыв прилипших частиц под действием центробежных, вибрационных или импульсных сил. Эти методы доступны для аппаратурного оформления и дают необходимые данные для статистической обработки.

Один из методов представлен на рис. 7.7. Этот метод назвали «метод центрифугирования». Именно этот метод был использован для определения адгезии частиц муки. При вращении запыленной поверхности, чаще всего смонтированной в роторе центрифуги, на частицы действуют центробежные силы $F_{\text{отр}}$, которые обусловливают отрыв прилипших частиц:

$$F_{\text{отр}} = m \cdot j; \quad M = 4/3\pi \cdot r^3 \rho \quad j = \omega^2 x; \quad \Omega = 2\pi \cdot n_{\text{ц}}; \qquad (7.23)$$

где r, ρ — радиус и плотность материала частиц; $n_{\text{ц}}$ — частота вращения центрифуги, c^{-1}, x — расстояние между запыленной поверхностью и осью вращения центрифуги.

Частота вращения центрифуги $n_{\text{ц}}$ и расстояние запыленной поверхности от оси вращения x легко определяются экспериментально. Нетрудно определить и размер частиц r. На основании этих данных по формулам (7.23) можно рассчитать силу отрыва $F_{\text{отр}}$, равную по величине силе адгезии, но направленную противоположно. Для получения интегральных адгезионных кривых поступают следующим образом. Первоначально подсчитывают число частиц на запыленной поверхности. Затем происходит вращение запыленной поверхности, при этом возникает центробежная сила. Число оборотов центрифуги увеличивают и каждый раз определяют долю удаляемых частиц. По полученным данным строят интегральные адгезионные кривые. Путем определения прочности материала на разрыв можно получить величину F_{aym}^{N} характеризующую аутогезию сыпучих пищевых масс.

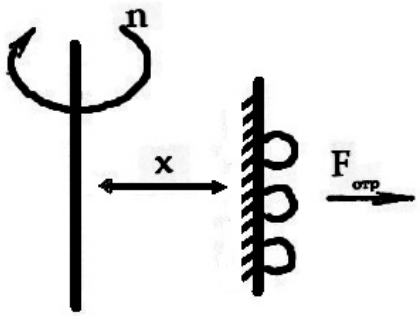


Рис. 7.7 – Схема действия центробежных сил при отрыве частиц

Однако, на наш взгляд, этот метод обладает существенными недостатками, которые предлагается выявить читателям этого пособия, а приведен он в учебных целях.

Наиболее эффективным в исследованиях сыпучих пищевых масс является *метод сдвига.* При помощи этого метода можно одновременно определить несколько параметров: коэффициенты внешнего и внутреннего трения, силы адгезии $F_{\text{ад}}^{N}$ и аутогезии $F_{\text{аут}}^{N}$, $C_{\text{ад}}$, $C_{\text{аут}}$. Рассмотрим более подробно особенности этого метода, который применялся для исследования свойств сыпучих пищевых масс, в том числе муки.

Прибор (рис. 7.8) состоит из трех узлов: устройств для помещения и перемещения испытуемого материала, приложения усилий сдвига и измерения этого усилия. Устройство для помещения сыпучего материала состоит из кюветы 2. Для фиксации движения кюветы в одном направлении имеются выступы, которые входят в выемы основания. Сверху кювета закрывается пластиной для сообщения внешнего давления $P_к$.

В кювету помещалась определенная навеска муки или другого сыпучего пищевого продукта. Использовались два варианта кювет. В первом варианте (см. рис. 7.8 а) сыпучий материал 1 контактирует с испытуемой поверхностью 3, и сдвиг происходит по границе раздела "сыпучий продукт – испытуемая поверхность". В этом случае определяются параметры адгезии и внешнего трения: $F_{ад}^{N}$, $C_{ад}$, и μ.

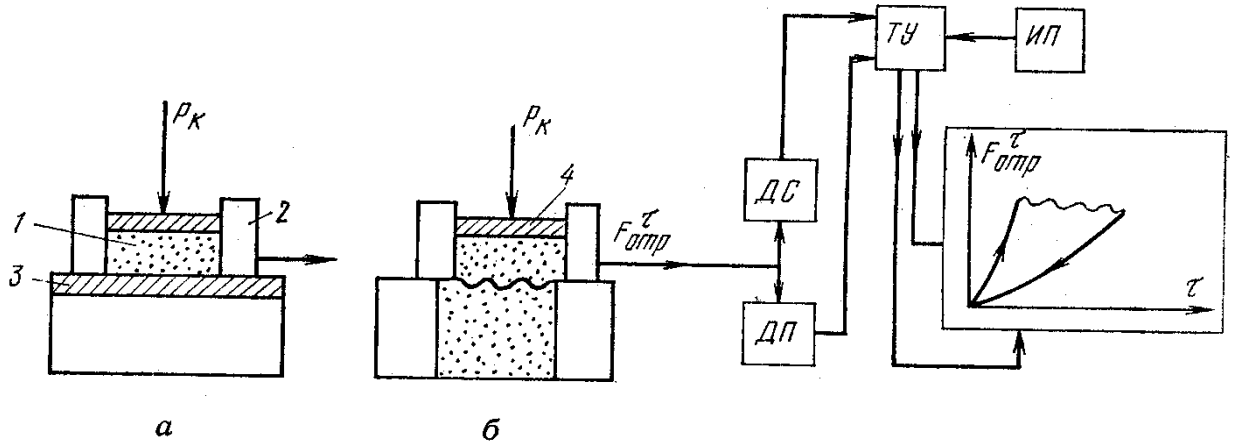


Рис. 7.8 – Блок-схема прибора для измерения адгезии (а) и аутогезии (б) сыпучих пищевых масс методом сдвига:
ДС, ДП - датчики силы и перемещения; ТУ — тензометрический усилитель, ИП — источник питания

Во втором варианте (рис. 7.8 б) испытуемая масса сыпучего материала помещается не только в кювету, но и во внутреннюю полость основания. Сдвиг осуществляется по массе сыпучего материала, при этом определяются параметры аутогезии и коэффициент внутреннего трения, т. е. $F_{ад}^{N}$, $C_{аут}$, и $\mu_{вн}$.

Для получения воспроизводимых результатов необходимо, чтобы число частиц в зоне сдвига было одинаковым. Это создается предварительным вибрационным уплотнением, которое проводится в течение 10 с. В этих условиях достигается примерно равномерная плотность упаковки частиц.

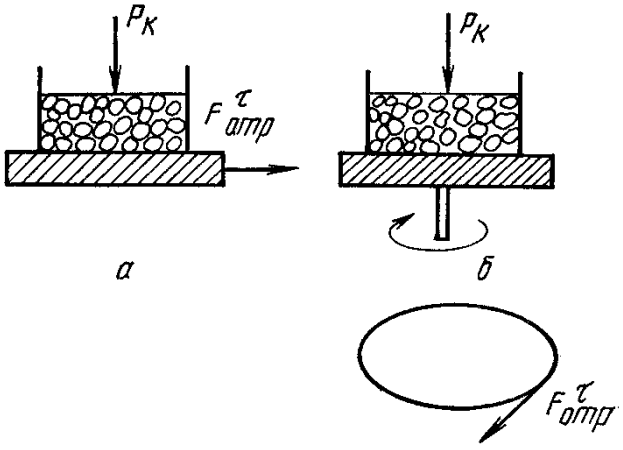


Рис. 7.9 – Схемы приборов для определения коэффициента трения за счет поступательного (а) и вращательного (б) движения

Определение усилий сдвига имеет ряд особенностей. Кювета перемещалась при помощи прибора МП-2С под действием силы $F_{отр}$ которая собственно и осуществляла сдвиг сыпучего материала по поверхности или внутри самого материала. Величина силы $F_{отр}$ измерялась по прогибу плоской пружины с помощью тензометрического датчика силы, сигнал от которого после тензометрического усилителя передавался на одну из координат потенциометра ПДС-021. Точность измерения силы $F_{отр}$ составляла 10^{-2} Н. Зная площадь сдвига S, равную площади кюветы, можно определить усилие сдвига

$$F^{\tau}_{отр} = F_{отр} / S \qquad (7.24)$$

Часто метод сдвига используют в ограниченных целях – только для определения коэффициента внешнего трения (рис. 7.9). Подобные методы основаны на определении силы $F_{отр}{}^{\tau}$ при постоянной скорости движения поверхности относительно сыпучей пищевой массы, причем движение может быть поступательным или вращательным. В последнем случае применяют диски (рис. 7.9 б). Величина коэффициента внешнего трения определяется по формуле (7.13).

Смысл коэффициентов внутреннего и внешнего трения можно уяснить, рассмотрев условия нахождения сыпучей массы на наклонной поверхности. Для этой цели обратимся *к* двучленному закону трения (формула 7.8).

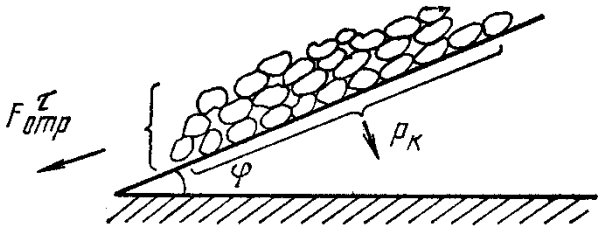


Рис. 7.10 – Положение сыпучего материала на наклонной поверхности

В результате наклона поверхности на определенный угол φ слой сыпучего материала начинает испытывать действие усилия $F_{отр}{}^{\tau}$ (рис. 7.10). Это усилие направлено тангенциально к поверхности и определяет сдвиг сыпучей массы. Если масса в расчете на единицу поверхности площади контакта равна М, то величину усилия сдвига $F_{отр}{}^{\tau}$ можно определить так:

$$F^{\tau}_{отр} = Mg \cdot \sin \varphi \qquad (7.25)$$

При некотором предельном угле наклона поверхности сила $F_{отр}{}^{\tau}$ в состоянии преодолеть адгезию или аутогезию частиц и осуществить сдвиг сыпучей массы. Если выполняется условие $C_{аут} < F_{отр}{}^{\tau} < C_{ад}$, то сдвиг произойдет по границе раздела сыпучий материал — поверхность, т. е. по линии *АА* (см. рис.

7.5) . При нарушении аутогезии двучленный закон трения представляется в виде формулы (7.22).

Давление, которое оказывает масса сыпучего материала на частицы у поверхности при отсутствии внешнего воздействия,

$$F_{\text{отр}}^{\tau} = Mg \cdot \cos\varphi \tag{7.26}$$

Согласно двучленному закону трения условия сдвига массы сыпучего материала определяются следующим соотношением:

$$Mg \cdot \sin\varphi = C_{\text{ад}} + \mu \cdot Mg \cdot \cos\varphi \tag{7.27}$$

В этом равенстве M - масса слоя частиц в расчете на единицу площади, подвергающаяся сдвигу в результате наклона поверхности.

Уравнение (7.16) позволяет определить значение коэффициента внешнего трения. При отсутствии сцепления, когда $C_{\text{ад}}$=0, из формулы (7.27) получим

$$\mu = \frac{Mg \sin\varphi}{Mg \cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \tag{7.28}$$

Угол внешнего трения численно определяется из тангенса угла наклона поверхности. Однако подобное равенство справедливо в случае, когда коэффициент трения определяется методом наклона поверхности.

Все предыдущие рассуждения остаются в силе, когда при наклоне поверхности выполняется условие $C_{\text{ад}} < F_{\text{отр}}^{\tau} < C_{\text{аут}}$ и движение сыпучего материала происходит по массе себе подобных, т. е по линии *ББ* (см. рис. 7.5). На основе двучленного закона трения, аппроксимированного для аутогезии, движение сыпучей массы при наклоне поверхности и сдвиге ее определяется условием

$$Mg \cdot \sin\varphi_{\text{вн}} = C_{\text{аут}} + \mu_{\text{вн}} \cdot Mg \cdot \cos\varphi_{\text{вн}} \tag{7.29}$$

При отсутствии аутогезии, когда $C_{\text{аут}} = 0$, из (7.29) следует

$$\mu_{\text{вн}} = \operatorname{tg}\varphi_{\text{вн}}, \tag{7.30}$$

где $\varphi_{\text{вн}}$ - угол внутреннего трения.

Еще раз подчеркнем, что коэффициент трения равен углу трения только в отсутствие адгезии или аутогезии. Это обстоятельство в некоторых случаях не учитывается, что может служить источником неточностей и ошибок.

Перейдем к характеристике *косвенных методов* определения адгезии и аутогезии сыпучих пищевых масс. Эти методы можно разделить на три большие группы, в основе которых лежат перемещение сыпучей массы, внедрение в эту массу инородного тела и оценка состояния сыпучего материала.

Разберем сначала методы, которые основаны на перемещении сыпучих масс. Этот принцип служит основой ранее рассмотренных прямых методов: он же может быть применен и для некоторых косвенных методов. Суть некоторых из них можно пояснить при помощи схемы, которая представлена на рис. 7.11.

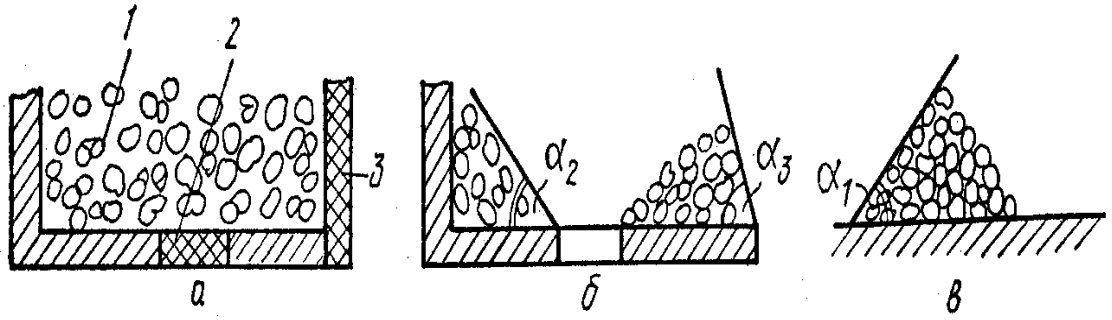


Рис. 7.11 – Схема определения углов естественного откоса (α_1), разрушения (α_2) и обрушения (α_3):
1 - сыпучая масса; 2 - крышка дна; 3 - съемная стенка

Первоначально сыпучий материал 1 (рис. 7.11 а) находится в емкости, имеющей отверстие в дне, которое закрыто крышкой 2, и разъемную стенку 3. Если снять крышку, то часть сыпучего материала будет свободно течь и образует на поверхности конусообразную фигуру (рис. 7.11 в). Угол между основанием конуса и ее боковой образующей называют углом естественного откоса. Он обозначен через α_1. Для образования конуса из сыпучего материала необходимо, чтобы через отверстие проходила определенная его масса. Угол, который характеризует наклон сыпучего материала в емкости после истечения из отверстия части его (этот угол на рис. 7.11 б обозначен α_2), называют углом разрушения.

Угол, определяющий наклон оставшейся массы сыпучего материала после удаления разъемной стенки, называют углом обрушения.

Три возможных метода, основанных на перемещении сыпучих масс, путем определения угла естественного откоса, разрушения и обрушения схематически представлены на одном рисунке. Фактически каждый из этих методов может иметь свое аппаратурное оформление и применяться обособленно. Наиболее часто все же характеризуют аутогезионные свойства сыпучих пищевых масс при помощи угла естественного откоса. Связь между углом естественного откоса и сцеплением $C_{аут}$, характеризующим аутогезию, для пшеничной муки различных сортов следующая:

Сорт пшеничной муки	Высший	I	II
Сцепление $C_{аут}$, кПа	5,0	4,6	8,4
Угол естественного откоса, град	46	44	53

Из приведенных данных можно сделать заключение, что имеет место корреляция между углом естественного откоса и аутогезией ($C_{аут}$), но речь идет лишь о корреляции и не более.

Угол естественного откоса нельзя отождествлять с углом внутреннего трения. Положение частиц на склоне конуса сыпучей массы определяется не только аутогезией, но и их механическим зацеплением за неровности других

частиц или положением в выемках между частицами. Кроме того, угол естественного откоса в определенной степени будет зависеть от размеров отверстия, через которое истекает сыпучий материал, расстояния между отверстиями и поверхностью, на которой формируется конус, и высоты этого конуса. Эти и некоторые другие факторы, в частности различие размеров и форм частиц сыпучей массы, дают основание считать, что метод определения аутогезии является косвенным. Сопоставимые результаты получают лишь в идентичных условиях, которые не могут быть соблюдены в различных исследованиях.

Одним из методов совместного определения адгезии и аутогезии можно считать метод, основанный на повороте пластины с нанесенной на ней массой сыпучего материала. При повороте пластины фиксируется минимальный угол, при котором начинается движение, а затем и удаление части муки с поверхности. Кроме того, измеряют массу муки, оставшуюся на поверхности в результате адгезии. Чем меньше угол поворота и масса оставшейся муки, тем слабее адгезия по сравнению с аутогезией. Косвенность и относительность метода заложены в условиях его осуществления: выбран произвольный слой муки, произвольно взяты размер пластин и давление прижима.

На сравнительно гладких поверхностях в связи с неоднозначностью сил адгезии сначала происходит нарушение сравнительно слабых адгезионных контактов. Затем под действием уже оторвавшейся части муки имеет место спонтанное и самопроизвольное сползание остальной прилипшей массы. В результате экранируется истинная адгезия. Поверхности, особенно бетонные, имеют шероховатость. Задержание муки на наклонной поверхности может происходить не за счет адгезии, а в результате зацепления за выступы шероховатой поверхности.

К числу косвенных методов определения аутогезии и трения можно отнести скорость истечения сыпучих пищевых масс

$$V_{\text{н}} = q / S, \tag{7.31}$$

где q — объем материала, истекающего за единицу времени; S - площадь сечения выходного отверстия.

Скорость истечения определяется не только свойствами продукта, но и массой материала, размерами и формой выпускного отверстия и другими факторами. По этой причине скорость истечения является относительной величиной. Например, при диаметре выпускного отверстия 1,2 см скорость истечения быстрорастворимого кофе составляет 11 см/с. При других размерах выпускного отверстия эта скорость будет другой.

С учетом некоторых факторов, от которых зависит давление на сыпучий материал, вместо скорости истечения используют такую характеристику, как коэффициент истечения.

$$K_{\text{н}} = \tau \cdot r^{n} / q, \tag{7.32}$$

где τ - время истечения порошка, с; r - радиус отверстия, мм; n - опытный коэффициент, зависящий от свойств пищевой массы; q - определенная навеска сыпучей пищевой массы.

В отличие от скорости истечения коэффициент истечения в большей степени отражает особенности сыпучего материала. Величина коэффициента истечения, однако, зависит не только от свойств сыпучего материала, но и от методики его измерения. Поэтому характеристика свойств сыпучей пищевой массы при помощи коэффициента истечения может только косвенно определить влияние аутогезии.

К косвенным относятся методы, основанные на внедрении инородного тела в сыпучую массу (рис. 7.12). Своим названием подобные методы обязаны форме внедряемого тела. Показателями, которые характеризуют аутогезию и внутреннее трение, могут служить глубина внедрения, внешние усилия или момент этого усилия.

В зависимости от размеров, массы и свойств материала внедряемого тела измеряемые показатели будут различными. Поэтому воспроизводимые и сопоставимые результаты можно получить при измерении различных сыпучих пищевых масс только одними и теми же приборами.

Несмотря на определенную ограниченность этой группы косвенных ме-

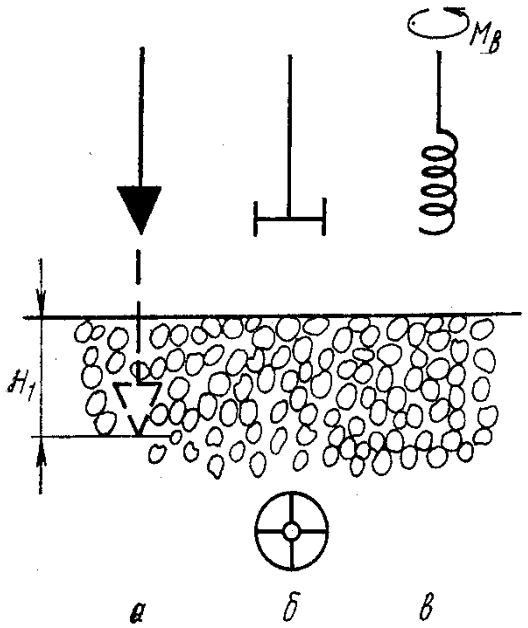
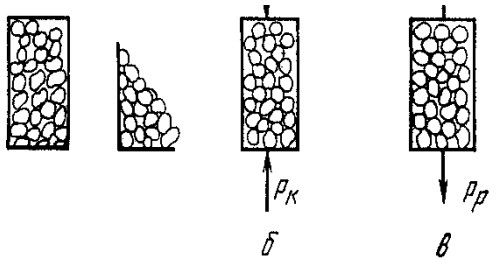


Рис. 7.12 – Схема методов, основанных на внедрении клина или конуса (а), крыльчатки (б) и спирали (в) в сыпучую пищевую массу.

Рис. 7.13 – Методы, характеризующие состояние сыпучей массы: самопроизвольное (а) и вынужденное (б) разрушение; разрыв (в)



тодов, они имеют и некоторые преимущества. Основное из них заключается в возможности получения показателей без нарушения структуры пищевой массы; кроме того, они доступны, просты в эксплуатации, что дает возможность применять их в заводских условиях.

Некоторые косвенные методы показаны на рис. 7.13. Они характеризуют состояние сыпучей пищевой массы. Оценка аутогезии и трения путем самопроизвольного разрушения проводится следующим образом. Испытуемому образ-

цу пищевой массы придают правильную форму, чаще цилиндрическую,(рис. 7.13 а). Для этой цели определенный объем массы помещают в цилиндр и через некоторое время извлекают его. За меру аутогезии и прочности материала принимают степень самопроизвольного разрушения массы цилиндрической формы. Эта степень оценивается взвешиванием оставшейся массы. Брикеты определенной формы, состоящие из сыпучих пищевых продуктов, разрушают, сдавливая их (рис. 7.13 б) или определяя прочность на разрыв (рис. 7.13 в). Получаемые значения $P_к$ и $P_р$ служат показателями аутогезии и прочности сыпучей пищевой массы.

Результаты исследований и получаемые параметры этой группы методов непосредственно характеризуют прочность и аутогезию. Величина параметров, однако, зависит от условий предварительной подготовки брикетов к испытанию, т. е. давления, необходимого для их создания, длительности выдержки и других факторов, искажающих первоначальную аутогезию и прочность сыпучей массы. В связи этим их отнесли к косвенным методам.

Завершая характеристику методов определения адгезии, аутогезии и трения сыпучих пищевых масс, отметим, что подобные методы применяются не только в пищевой, но и в других отраслях промышленности. В дальнейшем следует ожидать увеличения ассортимента методов определения адгезионных и аутогезионных свойств сыпучих пищевых масс.

7.6 Компрессионные свойства сыпучих сред

Компрессионные свойства характеризуют поведение продукта при воздействии на него нормальных напряжений в замкнутом объёме, между двумя пластинами или при каком-либо другом способе растяжения-сжатия образца продукта. Эти свойства используются для расчета рабочих органов машин и аппаратов и для оценки качества продукта, например, при растяжении - сжатии. К ним относятся коэффициент бокового давления, коэффициент Пуассона, модули упругости и др. Кроме того, ряд приведенных выше моделей – Максвелла, Кельвина и др. – могут описывать поведение продуктов при осевом или объемном деформировании.

Компрессионные свойства сыпучих сред описываются теми же параметрами, что и твердые тела. Однако авторами обнаружены некоторые особенности процесса сжатия слоя сыпучего материала. В ранее созданных исследователями моделях разрушения твердых тел рабочими органами конической и цилиндрической формы рассматривался процесс деформации единичных тел. Но в реальных процессах силовые воздействия передаются сразу множеству единичных тел, составляющих сыпучий материал с определенными исходными параметрами: гранулометрическим составом, насыпной плотностью и другими. При воздействии на сыпучую среду рабочими органами, она изменяет свои свойства.

Для формирования физической картины поведения сыпучей среды под нагрузкой были проведены дополнительные эксперименты на модельном мате-

риале – кофе растворимом сублимационной сушки. Испытания проводились при квазистатическом нагружении сжатием с различными скоростями. Предельные напряжения разрушения при сжатии и сдвиге, а также характер изменения нагрузки в зависимости от деформации определялись на приборе Структурометр СТ–1.

Прибор настраивали на режим "Определение упругих и пластических деформаций". Выбранный режим по заданному закону и рабочим параметрам полностью отвечает экспериментальному определению прочностных свойств сырья. Схема испытаний приведена на рисунке 7.14. После выбора режима задавали следующие параметры: значение начального усилия касания F_0 = 0,5 *H,* с которого начинается отсчёт перемещения столика; измерения проводили при различных скоростях перемещения столика $v = 0{,}17 \cdot 10^{-3}$ м/с, $v = 0{,}33 \cdot 10^{-3}$ м/с, $v = 0{,}83 \cdot 10^{-3}$ м/с, $v = 1{,}17 \cdot 10^{-3}$ м/с, $v = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Результаты испытаний на "Структурометре", полученные из таблицы усилий, в программе *Excel* представлены в виде диаграмм нагружения исследуемых тел *F*=f(*N*). Характерная зависимость напряжений σ от относительной деформации ε представлена на рисунке 7.15. Высокая точность приборного оснащения позволила выявить новые аспекты в поведении сыпучих сред под нагрузкой.

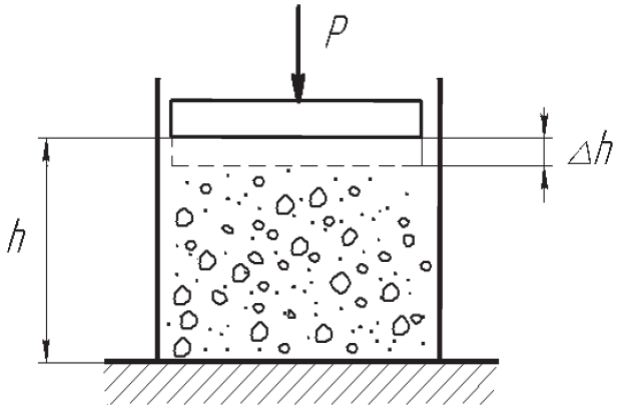


Рис. 7.14 – Схема испытания слоя сыпучей среды одноосным сжатием:
h – исходная высота слоя сыпучей части;
Δh – деформация слоя;
P – нагрузка при одноосном сжатии

Если ранее считалось, что зависимость напряжений от деформаций σ=f(ξ) носит степенной характер, соответствующий закону Кельвина $\sigma = E_{эф}\xi^2$, то достаточно точная измерительная техника позволила установить, что кривая имеет несколько характерных участков. На начальном этапе нагружения все кривые носят нелинейный характер, далее линия нагружения с коэффициентами корреляции 0,9911-0,9997 переходит в ломанную с точками излома. То есть, сыпучий материал проявляет свойства упругого тела Гука. Точки перегиба объясняются тем, что энергия упругой деформации достигает критической величины, что приводит к образованию новой поверхности в сыпучем материале – разрушению некоторого количества частиц.

Как видно из графика, в исследованном диапазоне модуль упругости возрос примерно в три раза. Следовательно, при постоянной скорости деформации сыпучий материал последовательно достигает промежуточных пределов прочности $\sigma_{прi}$, ступенчатое разрушение приводит к изменению гранулометрического состава, насыпной плотности, порозостности среды, после чего ступенчато возрастает модуль упругости E_i .

Рассмотрим модель взаимодействия подвижного рабочего органа инерционной машины для дезинтеграции и сыпучей среды. Примем упрощенный вариант движения подвижного рабочего органа – чистое качение по слою материала без проскальзывания и создания сдвига в слое.

В силу того, что действие рабочего органа измельчителя на элементарный объем материала кратковременно, будем считать, что в рассматриваемом объеме однократно достигаются предельные напряжения разрушения $\sigma_{пр}$, а сыпучий материал в начале процесса разрушения, трансформируясь в пористое сплошное тело, обладает модулем упругости E таким же, как у единичных тел, его составляющих. В реальном процессе модуль упругости сыпучего материала всегда меньше, чем модули упругости единичных тел, его составляющих, так как абсолютное количество дефектов структуры больше.

Рассмотрим работу деформации и разрушения сыпучей среды с позиции механики сплошных сред, а именно, применим гипотезу П.А. Ребиндера для определения работы разрушения:

$$A = \frac{\sigma_{пр}^2 \Delta V}{2E} + \gamma_{1,2} \Delta S, \qquad (7.33)$$

где $\sigma_{пр}$ – предельные напряжения разрушения тела, Па; E – модуль упругости материала, Па; ΔV – деформированный объем, м^3; $\gamma_{1,2}$ – удельная поверхностная энергия материала, Дж/м^2; ΔS – приращение поверхности тела, вновь образованная при разрушении поверхность, м^2.

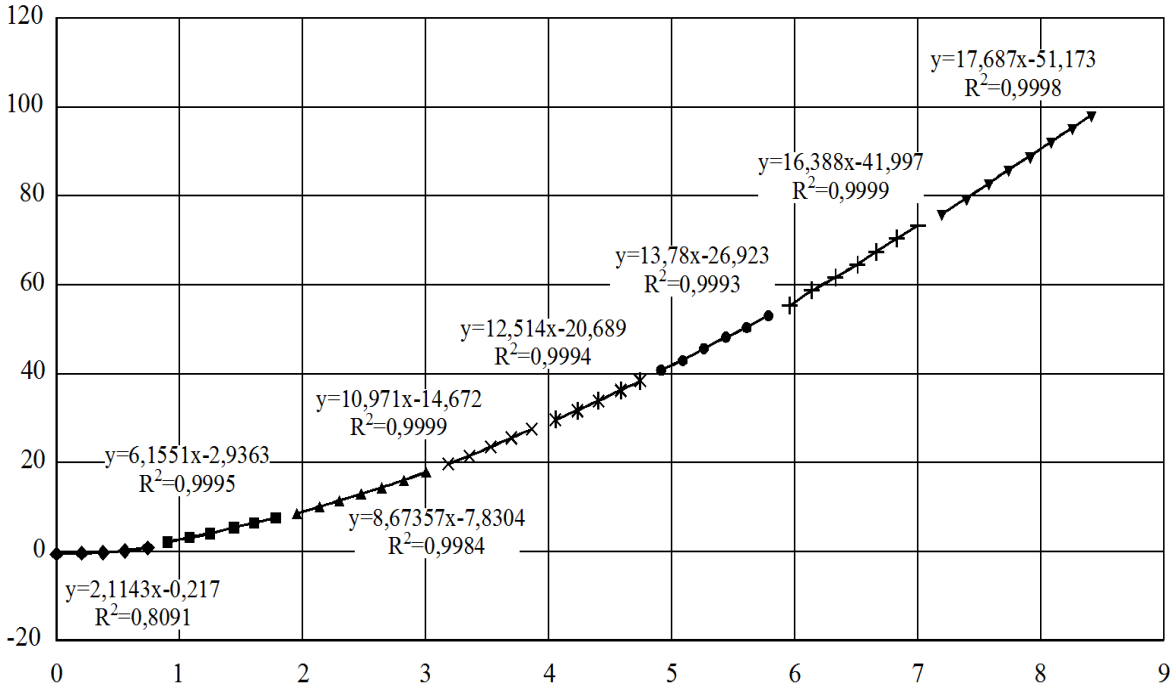


Рис.7.15 – Диаграмма нагружения слоя модельного материала (растворимый кофе сублимационной сушки) и уравнения регрессии, описывающие ее участки

Первое слагаемое выражения (7.33) представляет собой работу упругой деформации тела до достижения в нем предельных напряжений $\sigma_{пр}$. Второе слагаемое – это работа, затрачиваемая на образование новой поверхности ΔS.

Часть энергии упругой деформации, превышающая критическую, трансформируется в энергию новой поверхности, то есть затрачивается на преодоление внутренних связей между молекулами вещества, из которого состоит тело.
Рассмотрим состояние сыпучей среды от начала её деформирования до максимального значения деформации. Начальная толщина слоя среды составляет δ_i, конечная толщина – δ_{i+1} . Элементарная работа деформации

$$dA = \frac{\sigma_{np}^2}{2E}\,\mathrm{d}V_i + \gamma_{1,2}\,\mathrm{d}S_i, \tag{7.34}$$

где $\mathrm{d}V_i$ – деформированный объем при i-м нагружении; $\mathrm{d}S_i$ – приращение поверхности при i -м нагружении.
Единичная деформация $\mathrm{d}\delta_i$ состоит из двух слагаемых

$$\mathrm{d}\,\delta_i = \mathrm{d}\,\delta_{iu} + \mathrm{d}\,\delta_{iS}, \tag{7.35}$$

где $\mathrm{d}\delta_{iu}$ – упругая, восстанавливаемая часть деформации; $\mathrm{d}\delta_{is}$ – величина необратимой деформации, вызванной изменением состояния сыпучей среды, а именно – его насыпной плотности, порозности и т.д.

Упруго деформированный объем в выражении (7.34) равен

$$\mathrm{d}V_i = ab\,\mathrm{d}\,\delta_{iu}, \tag{7.36}$$

где a– длина пятна контакта, b – ширина зоны деформации слоя сыпучей среды.
Вновь образованная поверхность $\mathrm{d}S_i$ за единичное силовое воздействие может быть выражена через разность поверхностей до и после нагружения:

$$\mathrm{d}\,S_i = S_{i+1} - S_i. \tag{7.37}$$

Выразим $\mathrm{d}S_i$ через величину единичной необратимой деформации $\mathrm{d}\delta_{is}$. Будем считать, что средний размер частиц после нагружения изменился на величину $\bar{d}_i - \bar{d}_{i+1}$. Тогда приближенно вновь образованная поверхность составит

$$\mathrm{d}\,S_i = k\left(\bar{d}_i - \bar{d}_{i+1}\right)^2, \tag{7.38}$$

где k – коэффициент формы частиц.

За один круговой оборот рабочего органа по кольцевой поверхности будет совершена работа

$$A_{(1)} = \frac{\sigma_{np}^2}{2E}\left(2\pi R \cdot b \cdot d\delta_{iu}\right) + \gamma_{1,2}\Delta S_{(1)}. \tag{7.39}$$

За время $t=t_n$, достаточное для достижения требуемой конечной дисперсности $\bar{d}_k$, полная работа составит

$$A = m\left(\frac{\sigma_{np}^2}{2E}\left(2\pi R \cdot b \cdot d\delta_u\right)nt_n + \gamma_{1,2}k\left(\bar{d}_н - \bar{d}_к\right)^2\right), \tag{7.40}$$

где m – количество одновременно действующих рабочих органов (например, роликов, для конусного измельчителя m =1) , n – число оборотов центрального вала в секунду, t_n – время измельчения для достижения требуемого результата, $\bar{d}_н$ и $\bar{d}_k$ – начальный и конечный средние размеры сыпучей среды.

Приравняв работу, совершаемую активными силами, и выражение (7.40) получаем полную модель измельчения в конусном или роликовом инерционном измельчителе, включающую геометрические (R, e, b), кинематический (ω), динамический ($F_ц$) параметры измельчителя и свойства материала ($\sigma_{пр}$, E, $\gamma_{1,2}$, $d_н$, $d_к$).

Формула (7.40) получена для простого по составу сыпучего материала. Если параметр t_n рассматривать как время селективной дезинтеграции, а $\gamma_{1,2}$ – как энергию поверхностного адгезионного взаимодействия компонентов в отдельных частицах, то получим работу селективного разрушения в рабочей зоне инерционного измельчителя.

Представленное аналитическое исследование, подкрепленное экспериментами на современном точном измерительном оборудовании позволяет распространить известные теории деформации и разрушения к дезинтеграции сыпучих сред в слое. Выявлена ступенчатость процесса разрушения, который по сути является линейным, а не степенным, как считалось ранее.

7.7 Структурно-реологические свойства порошков

Порошки являются чрезвычайно своеобразными дисперсными системами. В различных состояниях они могут проявлять свойства сыпучей среды, твердого или вязко-пластичного тела Гершеля-Балкли. *Порошки* – двухфазные системы, представляющие собой твердые частицы дисперсной фазы, распределенные в воздухе или другой газовой среде. Традиционно к порошкам относят большинство сыпучих материалов, однако в узком смысле термин "порошки" применяют к высокодисперсным системам с размером частиц, меньшим некоторого критического значения, при котором сила межчастичного взаимодействия становится соизмеримой с их весом. По приведенной в пособии классификации (таблица 7.1) порошками являются материалы, относящиеся к классу «Связные».

Наибольшее распространение имеют порошки с размером частиц от 1 до 100 мкм. Удельная межфазная поверхность таких порошков меняется в широких пределах - от нескольких $м^2/г$ (аэросил, сажа) до долей $м^2/г$ (мелкие пески). Высокодисперсные порошки с частицами размером < 1 мкм, взвешенными в газовой фазе и участвующими в броуновском движении, образуют аэрозоли (пыли, дымы).

Наряду с развитой межфазной поверхностью, обусловливающей многие свойства порошков как высокодисперсных систем, важнейшее значение имеют структурно-реологические свойства порошков: способность к необратимым сдвиговым деформациям (течению), образование обратимо разрушаемых контактов между частицами (структурирование) и др. Основные реологические ха-

рактеристики порошков - предельное напряжение сдвига и эффективная вязкость. В рамках механики сплошных сред, начиная с работы К. Кулона (1773) до 2-й половины 20 века, порошки рассматривались, как пластические тела и на основе теории пластичности были сформулированы условия механической деформации порошков. В частности, сдвиговая деформация порошков наступает при предельном напряжении сдвига τ, обусловленном двумя факторами: притяжением частиц порошков друг к другу (аутогезией) и трением между частицами порошков (обычно называют внутренним трением, но не связанным с диссипацией энергии деформирования). Согласно условию Мора-Кулона,

$$\tau = C + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sigma_н, \tag{7.41}$$

где C - сопротивление деформированию, связанное с аутогезией; α - угол внутреннего трения, $\sigma_н$ - нормальное напряжение ($\mathrm{tg}\alpha \cdot \sigma_н$ - сопротивление, обусловленное внутренним трением).

Аутогезия порошков определяется главным образом природой и силой межчастичного взаимодействия. Основной вклад в межчастичные взаимодействия в порошках дают межмолекулярные взаимодействия и электростатическое отталкивание, связанное с заряжением поверхности при перемещениях частиц друг относительно друга и их соударениях. Роль электростатического взаимодействия особенно важна при взаимодействии полимерных частиц.

Условие Кулона-Мора позволяет сформулировать критерий для различения "связных" порошков, в которых аутогезия велика и частицы сцеплены друг с другом, т.е. система обладает некоторой структурой, и "несвязных" порошков, в которых сопротивление сдвигу обусловлено лишь трением между частицами. Критерий связности имеет вид: $\sigma_н >> C$.

Согласно модели, разработанной П. А. Ребиндером, Е. Д. Щукиным и Л. Я. Марголис в 1964, аутогезия частиц монодисперсного порошка приводит к возникновению пористой структуры, образованной цепочками из n частиц, вытянутыми в трех взаимно перпендикулярных направлениях, причем n связано с пористостью E структуры соотношением:

$$E = \frac{\pi}{6n^3}(3n - 2), \tag{7.42}$$

В рамках этой модели сопротивление деформированию C соответствует предельному напряжению сдвига пористой структуры и может быть определено выражением:

$$C \approx \alpha F_{\text{св}} \cdot n^{2/3} = \alpha F_{\text{св}} f(\varphi)/\delta^2, \tag{7.43}$$

где α - коэффициент порядка единицы, характеризующий геометрию упаковки частиц; $F_{\text{св}}$ - сила связи между частицами; N - число связей в единице объема; f (φ) - функция, определяющая объемную концентрацию φ частиц (число частиц в единице объема); δ - характерный размер частиц.

Учитывая, что структура порошка возникает при условии, когда вес частицы

$$G = mg \le \sum_{i=1}^{n} F_{\text{св}}, \tag{7.44}$$

m - масса частицы, g - ускорение свободного падения,
а также полагая, что для вещества плотностью $\rho_m \sim \delta^3$, можно выразить критерий связности частиц в порошке как критический размер $\delta_{кр}$ (Н. Б Урьев, 1975):

$$\delta_{\text{кр}} \approx (F_{\text{св}} / \rho g)^{1/3}, \tag{7.45}$$

Если между частицами действуют силы молекулярного притяжения, $\delta_{кр}$ изменяется от 100 до 500 мкм; для увлажненных порошков, в которых существенны капиллярные силы, значения $\delta_{кр}$ на порядок больше. Связными порошками являются высокодисперсные системы с диаметром частиц $d << \delta_{кр}$, несвязными порошками – грубо-дисперсные системы. Значение $\delta_{кр}$ служит также критерием агрегируемости частиц порошка.

Для связных порошков разрушение, вызываемое растягивающими усилиями, целиком определяется *аутогезией*. Прочность на разрыв $\tau_р$ (предельно допустимое растяжение) зависит от объемного содержания частиц (или пористости порошка) и может быть рассчитана на основе тех или иных предположений о структуре порошка. Согласно модели Ребиндера, Щукина и Марголис, при плотной кубической упаковке сферических частиц пористость структуры E = 0,52 и прочность на разрыв имеет максимальное значение $\tau_{макс}$. Для сыпучих материалов с $E < 0{,}52$ прочность $\tau_р$ может быть рассчитана по формуле:

$$\tau_{\text{р}} / \tau_{\text{макс}} = 1/n^2, \tag{7.46}$$

Для порошков с пористостью $E > 0.52$ можно определить $\tau_р$ на основе предположения о случайной упаковке частиц. Наибольшей прочностью $\tau_{макс}$ обладают порошки с минимальной пористостью $E_{мин}$ = 0,39-0,41 (после виброуплотнения $E_{мин}$ может достигать 0,36-0,37). Зависимость $\tau_р$ от E выражается соотношением:

$$\tau_{\text{р}} / \tau_{\text{макс}} = 1 - 2{,}5\left(1 - \frac{1-E}{1-E_{\text{мин}}}\right), \tag{7.47}$$

Структурно-реологические характеристики порошков можно регулировать в широких пределах, модифицируя межфазную поверхность добавками ПАВ, изменением формы частиц и т.п.

Во 2-й половине 20 века развитие новых технологий переработки порошковых материалов привело к необходимости изучения поведения порошков в динамических условиях (под воздействием вибрации, в потоке газа, при псевдоожижении и др.). Особенность динамического поведения порошков – течение при сдвиговом напряжении, меньшем предельного, причем, как правило, поро-

шок течет как неньютоновская жидкость. Агрегация частиц рассматривается как одна из причин неньютоновского поведения.

Эффективная вязкость $\eta_{эф}$ агрегированного порошка зависит от безразмерного параметра $(\tau/\eta\dot{\gamma})$, где η - вязкость неструктурированного порошка, заполняющего пространство между агрегатами, $\dot{\gamma}$ - скорость сдвига. Соответствующая зависимость выражается степенной функцией:

$$\eta_{эфф} / \eta \approx (\tau / \eta\dot{\gamma})^{n}. \qquad (7.48)$$

Показатель степени n - эмпирический параметр, для большинства порошков принимает значения в интервале от 0,5 до 0,7.

Вязкость η можно определить, рассматривая порошки как систему твердых, не связанных сферических частиц. В рамках механики множество частиц установлено, что существует минимальная вязкость (наибольшая текучесть) порошков как функция параметров внешнего воздействия (скорости подачи газа, амплитуды или частоты вибрации). Эти параметры являются оптимальными для многих технологических процессов (например, для перемешивания).

Порошкообразные материалы. В технике и технологии порошки с размером частиц от 1 до 100 мкм - минеральные вяжущие (цементы, известь, гипс и т.п.), удобрения, пожаротушащие средства, твердые компоненты в производстве керамики, металлокерамических изделий, наполнители для пластмасс, резин и др., а также пищевые продукты (мука, сахарная пудра, какао-порошок), лекарственные и косметические средства. Важнейшие технологические свойства таких материалов – *сыпучесть* (величина, обратная вязкости), *уплотняемость* (определяется кинетикой изменения объема порошка под действием динамической нагрузки и достигаемой объемной плотностью), *слеживаемость* в процессе хранения (образование структур с прочностью, превышающей первоначальную). Слеживаемость порошка может быть следствием нескольких факторов. Растворимые в воде порошки (например, минеральные удобрения) проявляют склонность к слеживанию при увлажнении и последующем высушивании, т. к. по достижении пересыщения раствора выделяются кристаллы, которые образуют "мостики срастания" между частицами порошка (кристаллизация структуры). Минеральные вяжущие слеживаются при длительном хранении на воздухе вследствие увлажнения, т. к. образующиеся продукты гидратации менее растворимы в воде, чем исходные порошки, и при пересыщении выделяются кристаллы - мостики срастания.

Слеживаемость порошка при хранении в емкости может вызываться увеличением площади контакта между частицами в результате их пластической деформации под действием веса вышележащих слоев. Для предотвращения слеживания гигроскопичные порошки гидрофобизуют, модифицируя поверхность частиц с помощью ПАВ, а в ряде случаев вводя твердые высоко дисперсные нерастворимые в воде добавки. Кроме того, особое внимание уделяют герметизации емкостей для хранения порошков, ограничивают сроки хранения и т.п.

7.8 Вибрационная механика сыпучих сред

Вибрация – один из видов колебательных процессов. Под нею понимают механические колебания с периодом, значительно меньшим промежутка времени, на котором рассматривается движение системы, и амплитудой, значительно меньшей характерного размера системы.

Долгое время вибрация рассматривалась в основном как вредный фактор – причина поломок, аварий, а также производственных заболеваний. И лишь в начале прошлого столетия берет отсчет период бурного развития вибрационной техники, без которой сейчас немыслим ряд важных производств при добыче и переработке полезных ископаемых, в химической технологии, в металлургии, в промышленности строительных материалов и при строительстве различных сооружений. Впрочем, отдельные примеры использования вибрации известны с очень давних времен, когда она применялась при просеивании сыпучих материалов, при строительных работах и даже в медицинской практике.

Кратко перечисленные выше (и более подробно – рассматриваемые ниже) вибрационные эффекты как раз и лежат в основе принципов действия ряда высокоэффективных машин; с другой стороны, те же эффекты могут стать причиной нежелательных и даже катастрофических ситуаций. Их существенная черта – нелинейный характер: результаты действия двух или нескольких факторов не складываются, а комбинируются, порой достаточно сложным, неожиданным образом (пример: результат одновременного приема двух хороших по отдельности лекарств может быть плохим).

Одним из ведущих специалистов в области вибрации в России является зав. лаб. вибрационной механики Института проблем машиноведения РАН и ОАО «Механобр-Техника» (г. Ст-Петербург). И.И. Блехман. Не пытаясь конкурировать с писательским мастерством и глубоким пониманием вибрационных процессов, воспользуемся материалами его книги «Вибрация «изменяет законы механики», адаптировав их для нашего пособия.

Для большинства вибрационных состояний характерно, что возникающее в системе под действием вибрации движение x естественно представляется

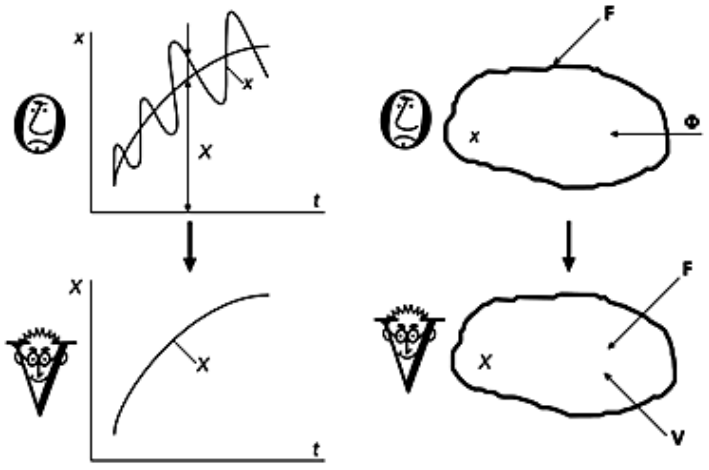


Рис. 7.16 – “Мир” наблюдателей O и V

в виде суммы двух составляющих – медленной X, мало изменяющейся за один период колебаний, и быстрой, “вибрационной” y, причем обычно основной интерес представляет именно медленное движение (рис. 7.16). Вообразим наблюдателя, не замечающего (или не желающего замечать) ни этих быстрых (как правило, малых) движений, ни быстрых сил, т.е. наблюдателя, который либо надел особые очки (сквозь них не видны быстрые движения системы), либо следит за движением при стробоскопическом освещении с частотой вспышек, равной частоте вибрации. Такой наблюдатель V, в отличие от обычного наблюдателя O, который “все видит”, будет регистрировать лишь медленную составляющую движения X. Не желая вступать в противоречия с законами механики, он должен будет объяснить упомянутые парадоксальные эффекты тем, что наряду с обычными медленными силами начали действовать некоторые дополнительные медленные силы или моменты V. Следуя П.Л. Капице, будем называть их вибрационными силами. Именно эти силы с точки зрения такого “необъективного” наблюдателя и приводят к перечисленным выше эффектам.
Наблюдатель O видит реальный процесс x, а наблюдатель V – только его медленную (среднюю) составляющую X (а). Наблюдатель O видит систему, на которую действуют медленные силы F и быстрые F, а наблюдатель V видит только систему, находящуюся под действием медленных сил F и V (б). Здесь и ниже наблюдатель O изображен печальным, а наблюдатель V - веселым. Этим подчеркивается, что мир наблюдателя V, который он видит через свои очки, гораздо проще, чем мир наблюдателя O. Значительно проще и соответствующие дифференциальные уравнения вибрационной механики.

Рассматривая соответствующие дифференциальные уравнения движения, можно прийти к положению, аналогичному известной теореме механики относительного движения. Согласно этой теореме, наблюдатель, связанный с ускоренно движущейся системой координат, должен ко всем действующим на систему обычным силам добавить силы инерции. В нашем же случае наблюдатель V, не замечающий ни быстрых сил, ни быстрых движений, обязан добавить ко всем обычным силам вибрационные силы. Если в механике относительного движения введение сил инерции – своего рода штраф за использование неинерциальной системы отсчета, то добавление вибрационных сил представляет собой штраф за игнорирование быстрых (как правило, малых) движений системы. Учитывая сказанное, будем называть механику, которой должен руководствоваться наблюдатель, не замечающий быстрых сил и быстрых движений (наблюдатель V), вибрационной механикой.

Одна из основных задач в вибрационной механике – о нахождении выражений для вибрационных сил. Эта задача достаточно эффективно решается в рамках разработанной теории.

Вибрационная механика – новый раздел механики и теории нелинейных колебаний, который интенсивно развивается учеными России, Украины, Германии, Дании и других стран. Она служит, в частности, теоретической основой вибрационной техники и технологии. Возникла в нашей стране эта

дисциплина не на пустом месте. Она базируется на фундаментальных исследованиях в области теории нелинейных колебаний и устойчивости движения, в которых отечественная школа физиков, математиков и механиков сыграла (и до сих пор играет) выдающуюся роль. Речь идет о трудах А.М. Ляпунова, Л.И. Мандельштама, Н.Д. Папалекси, А.А. Андропова, А.А.

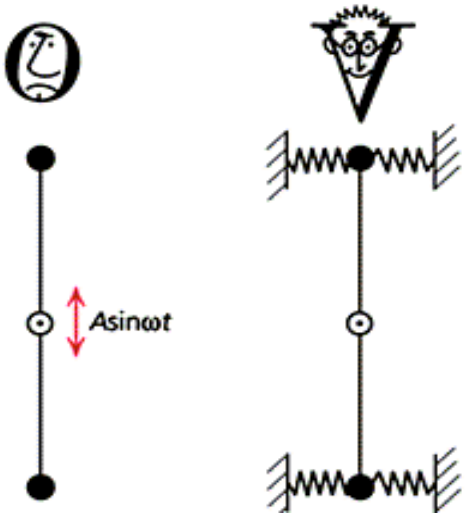


Рис. 7.17 – Маятник, точка подвеса которого совершает колебания по закону *Asinwt*

Витта,Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина, Б.В. Булгакова, А.И. Лурье и многих других, в том числе ныне здравствующих ученых.

Немного истории. Толчком к развитию вибрационной механики послужила работа П.Л. Капицы, опубликованная в 1951 г., в которой просто, изящно и физически прозрачно – путем прямого разделения медленного и быстрого движений – в задаче о маятнике с вибрирующей осью подвеса получен яркий результат: установлена устойчивость верхнего положения маятника и найдено соответствующее условие устойчивости (рис. 7.17).

Здесь и далее цветные стрелки показывают направление вибрации. Верхнее положение маятника может стать устойчивым вследствие вибрации его оси (а). Наблюдатель V считает это результатом того, что маятник подпирается в обоих положениях равновесия незримыми пружинами (б). Наличием пружин объясняется тот факт, что маятниковые часы на вибрирующем основании всегда спешат (тогда, как песочные часы в этом случае всегда отстают).

Те же результаты, найденные путем достаточно трудоемкого исследования, легко получаются посредством приемов (строго не обоснованных!), обобщающих прием Капицы для более сложных систем. Появились и работы других авторов, применивших его подход к решению ряда прикладных задач (отметим в их числе С.С. Духина, М.П. Юшкова, К.М. Рагульскиса, С.М. Зеньковской). Стало очевидно, что успех не случаен. И.И. Блехман поставил перед собой задачу – распространить прием Капицы на достаточно общие нелинейные систе-

мы и по возможности математически обосновать его в духе асимптотических методов нелинейной механики. Это привело, во-первых, к решению ряда сложных и важных для приложений задач о действии вибрации на нелинейные системы – в диапазоне от теории механизмов и машин до небесной механики. Во-вторых, был математически формализован аппарат метода. Наконец, в-третьих, сформировались концепции, названные И.И. Блехманом *вибрационной механикой и виброреологией*. Было установлено, что они представляют собой частные случаи более общей концепции – механики систем со скрытыми (игнорируемыми) движениями.

К сожалению, практически во всех обзорах блестящей деятельности академика Капицы не отмечается значение его работы о маятнике в развитии и становлении нового эффективного метода и нового раздела теории нелинейных колебаний. Воистину справедливо известное изречение о том, что талант точно поражает намеченную цель, а гений одновременно поражает и многие другие цели!

7.8.1 Вибрационные перемещения сыпучих материалов

Под эффектом вибрационного перемещения понимается возникновение направленного в среднем изменения (в частности – движения) за счет ненаправленных в среднем (колебательных) воздействий. На нем основаны: транспортирование отдельных тел и сыпучих материалов в вибрирующих лотках и сосудах; работа устройств, называемых вибрационными преобразователями движения и вибродвигателями; погружение свай, шпунта и оболочек, а также разделение частиц сыпучего материала по плотности, размерам и некоторым другим параметрам за счет вибрации; движение вибрационных экипажей; полет и плавание живых организмов. В качестве примера вредного проявления этого эффекта можно указать возникновение под действием вибрации подвижности номинально неподвижных деталей машин (в частности – самоотвинчивание гаек).

В последние годы либо по незнанию предшествующих работ, либо по другим менее простительным причинам ряд авторов присваивает тем же эффектам иные названия: “ретчет”, “прогрессивное движение” и т.п. Первое в переводе с английского означает храповик – стопорящееся при вращении в одном из направлений колесо с наклонными зубцами, используемое, например, в механизме часов. С помощью храповика колебания маятника или балансира преобразуются в направленное движение часовых стрелок.

В литературе встречаются и сомнения в возможности получения направленного движения путем колебательных (в том числе случайных) воздействий. Это, якобы, противоречит второму началу термодинамики. Такие сомнения безосновательны. В общей форме ответ состоит в следующем: для получения вибрационного перемещения необходима та или иная асимметрия системы. Можно различать шесть основных видов асимметрии: силовую, кинематическую, структурную (конструктивную), градиентную, волновую и начальную

(т.е. связанную с начальными условиями движения). Характер каждого вида асимметрии частично ясен из его названия. Разумеется, возможно сочетание сразу нескольких, например, двух видов асимметрии.

Вибрационное перемещение (транспортирование) во всех перечисленных случаях можно трактовать в рамках вибрационной механики: наблюдателю *V* представляется, что оно происходит под действием некоторой вибрационной силы *V*.

Вот как работает техника, основанная на эффектах виброперемещения. На рис 7.18 а схематически изображено устройство для вибрационного транспортирования сыпучей среды. Под действием вибрации лотка материал поступает на него из бункера и транспортируется влево. На рис.7.18 б представлен

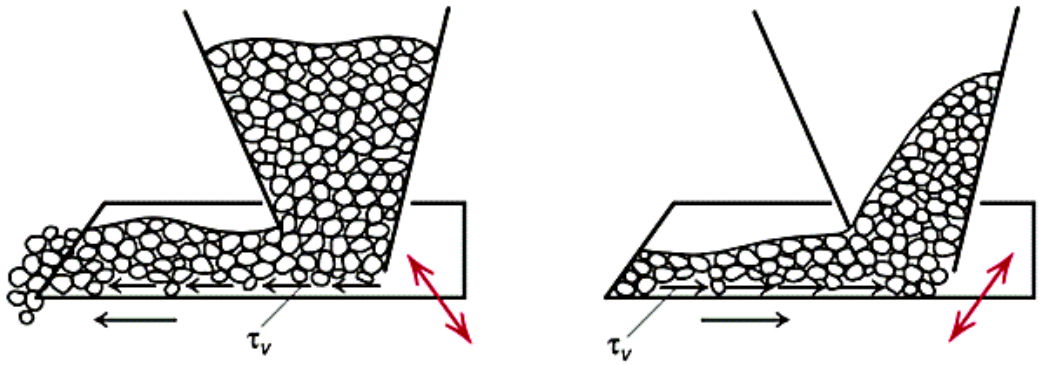


Рис. 7.18 – Вибрационное истечение и вибрационное транспортирование сыпучего материала (а) и заполнение бункера сыпучим материалом (вибробункеризация) (б); t_V - вибрационное напряжение

противоположный процесс – *вибробункеризация*. В этом случае под действием иным образом ориентированной вибрации лотка бункер заполняется поступающим оттуда материалом. В рамках вибрационной механики оба процесса естественно объясняются появлением вибрационных напряжений t_V, распределенных по поверхности лотка.

На рис. 7.19 дана схема вибрационного устройства для заполнения порошком тонкой металлической трубки, что необходимо при изготовлении электродной проволоки. Устройство обеспечивает равномерное и плотное заполнение порошком трубки диаметром 3-7 мм и длиной до 500 м.

Это пример технологической задачи, которая вряд ли могла быть эффективно решена без использования вибрации. В описываемом устройстве трубка наматывается на вертикальный цилиндрический барабан и закрывается снизу. Барабану сообщаются винтовые колебания. Подаваемый сверху порошок заполняет трубку. Как и по отношению к ряду других вибротранспортирующих устройств, было бы совершенно недостаточно сказать, что порошок становится под действием вибрации текучим, подобно жидкости, т.е. имеет место эффект псевдоожижения. Не менее важно, что на каждом участке создается вибрационная сила, обеспечивающая “напор” в нужном направлении.

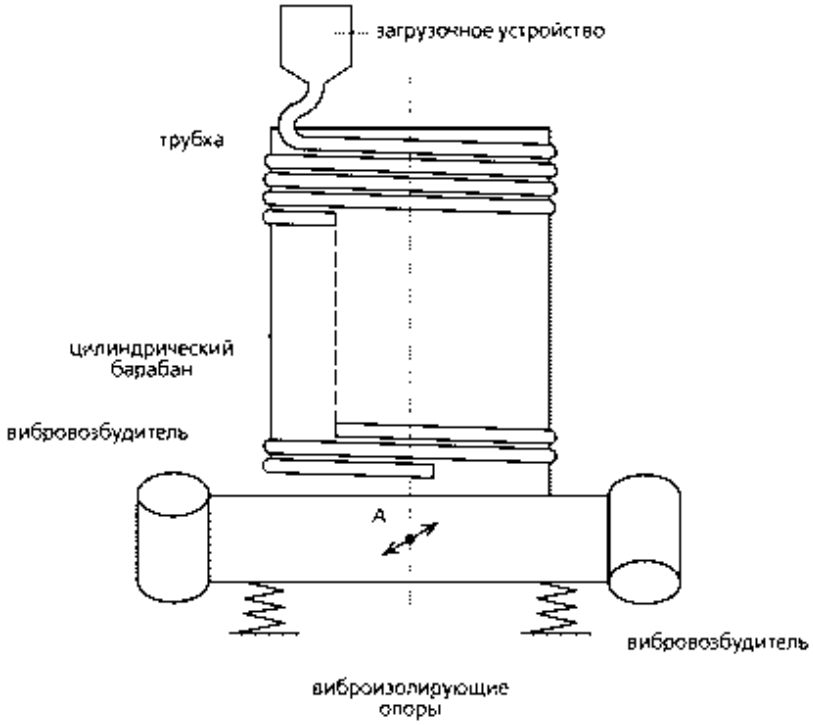


Рис. 7.19 – Схема устройства для заполнения порошком тонкой металлической трубки

То же самое относится в процессу *виброразгрузки* сыпучих грузов из железнодорожных вагонов (рис.7.20). Характер вибраций, сообщаемых вагону, таков, что они не только “разжижают” материал, но и подают его к месту разгрузки.

Приведенными примерами далеко не ограничивается практическое использование эффектов вибрационного перемещения. Машины, основанные на этих эффектах, широко применяются при переработке полезных ископаемых, на предприятиях строительной, химической и пищевой промышленности.

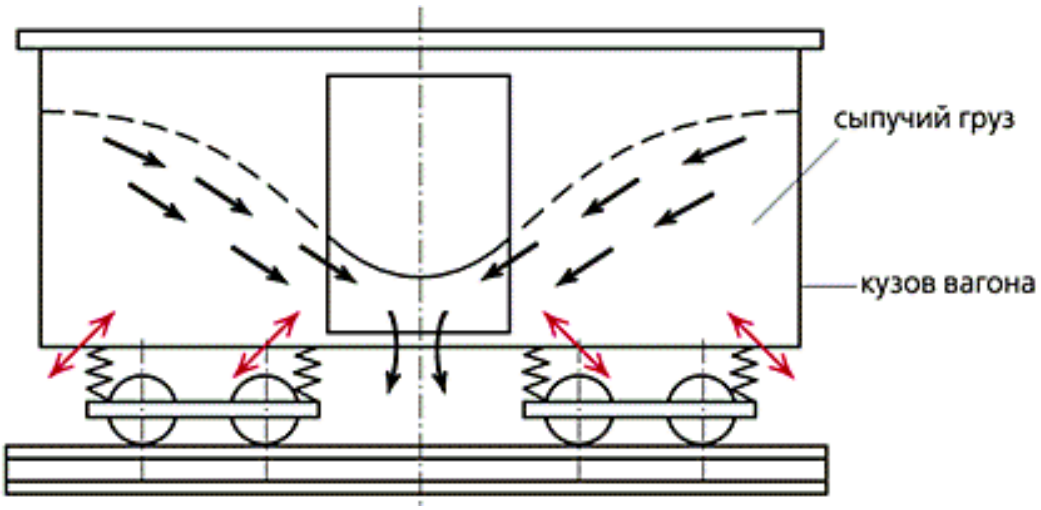


Рис. 7.20 – Вибрационная разгрузка железнодорожных вагонов с сыпучими грузами

7.8.2 Вибрационные состояния сыпучих сред

Вибрация оказывает значительное влияние на состояние сыпучих сред. Это обусловлено тем, что вибрация преобразует силы трения. В состоянии покоя между частицами действуют силы сухого трения покоя. Вибрация заставляет частицы перемещаться друг относительно друга, что приводит к их взаимным соударениям. Частицы начинают осциллировать с собственной частотой. Их поверхности совершают колебания, в результате контакты между поверхностями частиц становятся дискретными. Силы взаимодействия частиц сыпучей среды преобразуются в силы вязкого трения. Сыпучий материал приобретает свойство текучести.

Наиболее эффективный способ воздействия на сыпучие среды – *инерционный способ* создания колебаний – основан на превышении сил инерции материала при его знакопеременных движениях над силами трения.

Вибрационное состояние материала оценивается интенсивностью вибраций:

$$\lambda = \alpha\omega^2 / g\,, \tag{7.49}$$

где $\alpha\omega^2$ - ускорение вибрационного движения. Для тонкодисперсных материалов применяют критерий удельной мощности, приложенной к единице материала:

$$\nu = \alpha^2\omega^3 \tag{7.50}$$

Под воздействием инерционных сил частицы материала перемещаются, стремясь занять положение, соответствующее минимуму их потенциальной энергии, в то же время на траекторию их движения влияет количество сообщенной извне кинетической энергии.

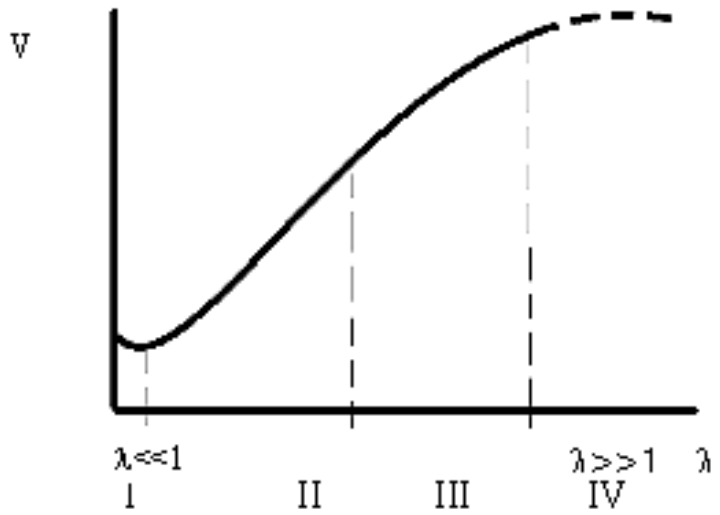


Рис. 7.21 – График зависимости объема сыпучей среды от интенсивности вибрации

Вибрационное состояние сыпучих сред иллюстрируется графиком зависимости объема сыпучей среды от интенсивности вибрации (рис.7.21)
Участок 1 - *виброуплотнение* - возникает при интенсивности колебаний малых значений ($\lambda<<1$). Частицы приобретают некоторую подвижность, стремясь занять положение, соответствующее минимальному расстоянию от днища сосуда. Виброуплотнение используется при затаривании сыпучих материалов в емкости.

Участок 2 - *виброожижение* - такое состояние сыпучего материала, когда частицы, осциллируя с частотой вынужденных колебаний, начинают совершать медленные движения по замкнутым траекториям. В сосуде образуются циркуляционные потоки. Объем сыпучего материала превышает начальный. Сыпучая среда становится текучей. В состоянии виброожижения происходит сегрегация частиц по их размерам, плотности и форме. Происходит послойное разделение сыпучей среды. Если сыпучий материал состоит из частиц одинаковой плотности, но значительно отличающихся размерами, то происходит выталкивание крупных частиц на поверхность. Крупные тела «всплывают», (рис. 7.22). Это объясняется тем, что частицы меньших размеров обладают большей подвижностью и соответственно большей возможностью занять положение, соответствующее минимуму потенциальной энергии, то есть они подсыпаются под крупные тела, выталкивая их на поверхность.

Если вибрации подвергается сосуд, в котором находится материал, состоящий из частиц различной плотности, но близких размеров (рис. 7.23), тела,

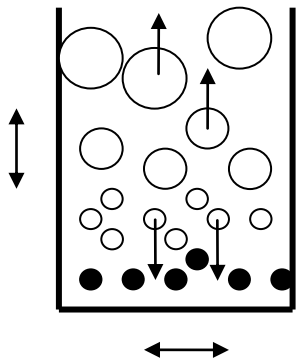


Рис. 7.22 – Разделение сыпучей полидисперсной среды при виброожижении

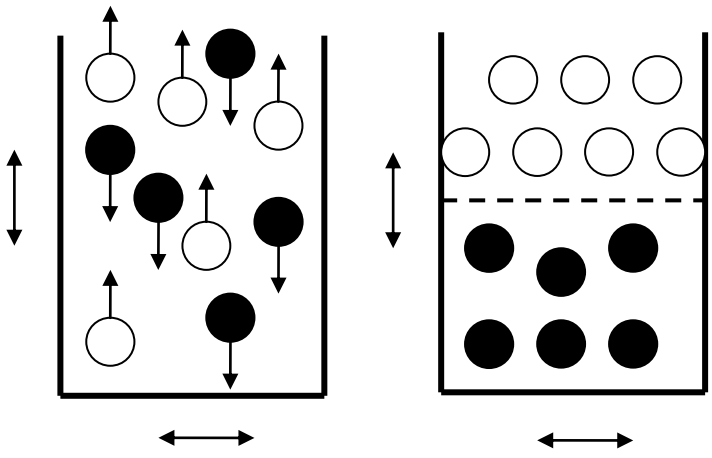


Рис. 7.23 – Разделение монодисперсной среды, содержащей частицы разной плотности

обладающие большей потенциальной и кинетической энергией будут вытесняться на поверхность телами с меньшей энергией, то есть образуется встречное движение частиц различной плотности, при котором тела с большей массой опускаются, а тела с меньшей массой поднимаются на поверхность.

В состоянии *вибротечения* (участок 3) частицы сыпучего материала совершают медленные циркуляционные движения в сосуде (рис. 7.24). Частицы, находящиеся у стенок сосуда, приобретают кинетическую энергию, сообщенную стенками, и передают её частицам внутри сосуда. Процесс передачи сопровождается диссипацией энергии, которая приводит к тому, что амплитуда колебаний частиц в центре значительно меньше, чем у стенок. Соответственно силы трения у стенок меньше, чем силы трения в центральных слоях среды. Это приводит к тому, что частицы у стенок непрерывно опускаются к днищу сосуда, вытесняя частицы центральных слоев на поверхность.

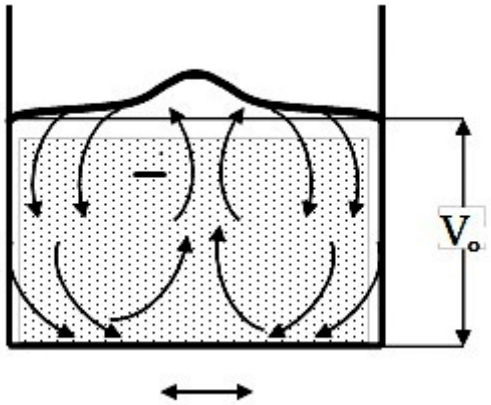


Рис. 7.24 – Циркуляционные движения сыпучей среды при вибротечении

И наиболее динамичное состояние сыпучей среды – *виброкипение* (участок 4 на графике рис. 7.21). Оно наступает при значительном превышении ускорения вибрации гравитационного ускорения. В этом состоянии частицы получают от рабочих органов высокую кинетическую энергию, которая позволяет им большую часть времени находиться в свободном полете. Но виброкипение - не аналог броуновского движения, так как, кроме интенсивного движения частиц в вибрирующем сосуде наблюдается и циркуляционное движение воздуха, сопровождающееся случайными фонтанирующими выбросами мелкодисперсной фракции (рис. 7.25).

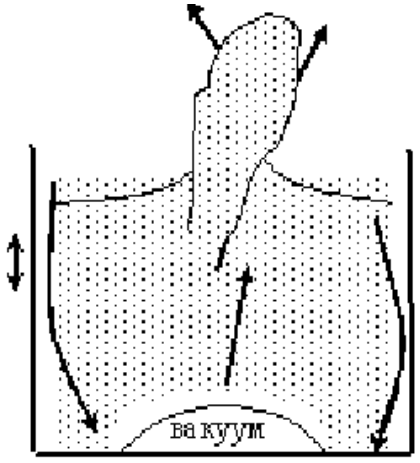


Рис. 7.25 – Виброкипение сыпучего материала в сосуде

Фонтанирующие выбросы возникают в силу того, что в нижних центральных слоях днища сосуда возникает вакуум. В зону вакуума периодически пробиваются потоки воздуха, которые выносят на поверхность через разрых-

ленный виброкипящий слой тонкодисперсные фракции. Виброкипение в открытых сосудах сопровождается сильным пылением. *Виброразделение на поверхности* основано на том, что каждая частица сыпучей среды, обладая индивидуальными параметрами (весом, размерами, формой, шероховатостью поверхности и так далее), движется по индивидуальной траектории (рис. 7.26).

В результате получается веерообразное распределение сыпучего материала по поверхности. В случае разделения полидисперсных многокомпонентных смесей можно добиться такого эффекта, когда происходит разделение не только по крупности, но и по плотности. Процесс разделения управляется параметрами вибрации (амплитудой и частотой) и углами наклона поверхности относительно горизонтальной плоскости

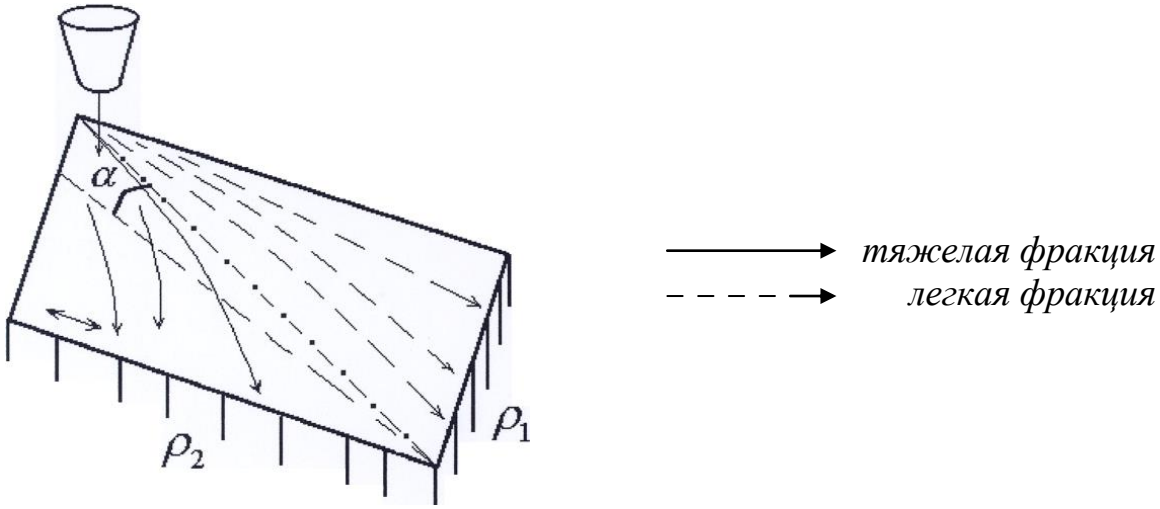


Рис. 7.26 – Траектория движения частиц по вибрирующей поверхности

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение сыпучим материалам.
2. Как классифицируют сыпучие материалы по их дисперсности?
3. Напишите формулу для высоты устойчивого откоса материала, уплотненного заданной нагрузкой.
4. Назовите классы и группы, на которые делят сыпучие материалы.
5. Дайте характеристику классу «несвязные».
6. Дайте характеристику классу «связно-текучие».
7. Дайте характеристику классу «связные».
8. Что такое гранулометрический состав?
9. Как определяют средний размер пробы сыпучего материала?
10. Что такое «гистограмма», как она строится?
11. Дайте определение распределительной функции.
12. Что является дифференциальной характеристикой распределительной функции?

13. Какой закон распределения по мнению А.Н.Колмогорова описывает распределение частиц сыпучей среды по размерам?
14. Какая функция распределения применима, если подвергнуть сыпучую среду длительному измельчению?
15. Как выглядят дифференциальные характеристики распределения сыпучих материалов переизмельченых и недоизмельченных?
16. Какими критериями оценивают качество сыпучего материала?
17. Изложите методику оценки качества сыпучей среды.
18. Какая смесь является полностью делимой, какая – нет?
19. Когда целесообразно вместо нормального закона распределения использовать распределение Вейбулла?
20. Что называют плотностью материала сыпучей среды и какова методика ее определения?
21. Что такое «насыпная плотность» сыпучего материала?
22. Что такое «порозность» и как она определяется?
23. Дайте определение гигроскопичности и изложите методику ее определения.
24. Что такое аутогезия?
25. Дайте определение агломерации, агрегации и слеживаемости.
26. Какие силы формируют аутогезионное и адгезионное взаимодействие в сыпучей среде?
27. Отличие законов Дерягина и Амонтона.
28. Как направлены силы адгезии и аутогезии к поверхности сдвига?
29. Как графически найти коэффициенты внешнего и внутреннего трения?
30. Как объяснить, что трение покоя всегда больше трения скольжения?
31. Какие методы исследований поверхностных свойств известны?
32. Проведите анализ метода «центрифугирования».
33. Приведите блок-схему прибора для измерения адгезии и аутогезии сыпучих пищевых масс методом сдвига, поясните принцип действия.
34. Какими способами определяют коэффициенты трения сыпучих сред?
35. Изобразите схемы для определения углов естественного откоса, разрушения и обрушения.
36. Какие косвенные методы определения аутогезии и трения известны?
37. Что отражают компрессионные свойства сыпучих материалов?
38. Какую форму имеет линия зависимости «усилие-деформация» для сыпучей среды при одноосном сжатии?
39. Как объясняются точки излома на линии зависимости «усилие-деформация» для сыпучей среды?
40. Какие сыпучие материалы называют порошками, их отличие от других сыпучих сред?
41. Чем определяется аутогезия порошков?
42. Сформулируйте условие Кулона-Мора.
43. Как можно изменить структурную вязкость порошков?
44. Как определяется эффективная вязкость порошка?

45. Что такое «слеживаемость» порошка и как можно ее избежать?
46. Как можно разделить движения в сыпучих средах при их вибрационном перемещении?
47. Как П.Л. Капица решил задачу о маятнике с вибрирующей осью подвеса?
48. Назовите основные асимметрии системы, необходимые для получения вибрационного перемещения.
49. Изобразите схемы виброперемещения (вибродозирования) и вибробункеризации.
50. Каким критерием оценивается вибрационное состояние сыпучей среды?
51. Как изменяется объем сыпучей среды при изменении интенсивности вибрации?
52. Дайте характеристику виброуплотнения и приведите примеры его технологического применения.
53. Дайте характеристику виброожижения и приведите примеры его технологического применения.
54. Дайте характеристику вибротечения и приведите примеры его технологического применения.
55. Дайте характеристику виброкипения и приведите примеры его технологического применения.
56. Как движутся частицы сыпучих сред по вибрирующей поверхности?

Литература:

1.Арет В.А., Николаев Б.Л., Николаев Л.К. Физико – механические свойства сырья и готовой продукции: учебное пособие. СПб.: ГИОРД, 2009. 448 с.
2.Блехман И.И., Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
3.Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для студ. вузов. 9-е изд., М.: Издательский центр «Академия», 2003. 576 с.
4.Горбатов А.В. Реология мясных и молочных продуктов. М.: Пищевая промышленность, 1979. 384 с.
5.Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смигла В.П. Адгезия твердых тел. М.: Наука, 1973. 279 с.
6.Зимон А Д , Андрианов Е И., Аутогезия сыпучих материалов, М., 1978;
7.Косой В.Д., Малышев А.Д., Виноградов Я.И. Инженерная реология биотехнологических сред. М.: ГИОРД, 2005. 647 с.
8.Кузнецов В.Д. Поверхностная энергия твердых тел. М.: Гостехиздат, 1954. 258 с.
9.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
10.Ребиндер П.А. Поверхностные явления в дисперсных системах. Коллоидная химия. Избранные труды. М: Наука, 1978. 368 с.
11.Ревнивцев В.И., Гапонов Г.В., Зарогатский Л.П. Селективное разрушение минералов. М.: Недра, 1988. 286 с.
12.Урьев Н Б., Высококонцентрированные дисперсные системы. М., 1980;
13.Урьев Н Б., Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов, М., 1988;
14.Griffits A.A. The phenomena of Rupture und Plou in Solids // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser A.1921.V. 221.P. 163 – 198.